3 options pour le devoir maison 9 :
Option 1 : rédiger sur feuille l'exercice 9 de la fiche d'exercices 7 sur les applications linéaires.
Option 2 : chercher la partie 1 du problème ci-dessous.
Option 3 : chercher le problème ci-dessous en entier.

Une base plus adaptée ?

Partie I : Soit E=$\mathbb{R}^3$. On note B_c la base canonique de E. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est M=Mat(f, B_c).

1. Déterminer suivant les valeurs du réel λ, le rang de l'endomorphisme $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$.
2. On définit deux applications linéaires : $g = f - 2Id_E$ et $h = f + 2Id_E$.
   Justifier sans calcul que $Ker(g) \neq \{O_E\}$ et $Ker(h) \neq \{O_E\}$.
3. Déterminer une base de $Ker(g)$.
4. Prouver sans calcul que $Ker(g) \subset Im(g)$.
5. Déterminer une base de $Ker(h)$.

Partie II, partie facultative. L'objectif de cette partie est de déterminer une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ plus adaptée pour f, c'est-à-dire dans laquelle la matrice de f soit plus simple.

Pour tout couple (a, b) de réels, on note $J(a, b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Nous souhaitons construire une base telle que la matrice de f dans cette base soit $A = J(2, -2)$.

6. Supposons que cette base (u_1, u_2, u_3) existe :
   - Justifier : $u_1 \in Ker(f - 2Id_E)$.
   - Que dire du vecteur u_3 ?
   - Justifier que u_2 est un antécédent du vecteur u_1 par l'application linéaire $f - 2Id_E$.
7. Construire alors une base (u_1, u_2, u_3), notée B_1, de $\mathbb{R}^3$, telle que Mat$(f, B_1) = A$.
8. Quelle relation matricielle existe-t-il entre M et A ?
9. Une application : Soit w=(1,2,3) un vecteur de E.
   (a) Déterminer les coordonnées de w dans la base B_1.
   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout entier naturel n, $[J(a, b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$.
   (c) En déduire les coordonnées du vecteur $f^n(w)$ dans la base B_c, pour tout entier naturel n.