BCPST2-2 - Devoir maison n°10 - A rendre le mardi 17 décembre 2024

3 options pour le devoir maison 10 :
Option 1 : rédiger sur feuille l'exercice 2 de la fiche d'exercices 8 sur la réduction des endomorphismes.
Option 2 : chercher la question 1 et la question 3 du problème ci-dessous.
Option 3 : chercher le problème ci-dessous en entier.

Recherches de valeurs propres

Soit a un réel, et $M_a = \begin{pmatrix} -1 & 2-a & -a \\ -a & 1 & -a \\ 2 & a-2 & a+1 \end{pmatrix}$.
On note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que M_a soit la matrice de f_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Pour quelles valeurs du réel a, f_a est-il bijectif ?

2. Cas où $a = 1$:
   (a) 0 est-il une valeur propre de f_1 ?
   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f_1.
   (c) Déterminer la dimension de chacun des sous-espaces propres de f_1.

3. Cas où $a = 0$:
   (a) 0 est-il une valeur propre de f_0 ?
   (b) Soit $v_3 = (1, 0, -1)$. Calculer $f_0(v_3)$. Qu'en déduire pour $Sp(f_0)$ (Le spectre de f_0) ?
   (c) Montrer que 1 est une valeur propre de f_0 et donner la dimension du sous-espace propre de f_0 associé.
   (d) En déduire $Sp(f_0)$. (Question à traiter après le cours de vendredi 13 décembre...)
   (e) pour les 5/2 : f_0 est-il un endomorphisme diagonalisable ?
   Si oui, déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $M_0 = PDP^{-1}$.
   (f) Pour les 3/2 : Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$, obtenue par juxtaposition des vecteurs d'une base de $E_1(f_0)$ et des vecteurs d'une base de $E_{-1}(f_0)$.
   On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}_1$.
   Donner sans calculer P^{-1}, la matrice $D_0 = P^{-1}M_0P$. Quelle propriété a-t-elle ?

4. Soient $v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, 1, -2)$ et v_3 donné dans le $3.b$.
   (a) Montrer que la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On la note $\mathcal{B}_2$.
   (b) Calculer les images de chacun des vecteurs v_1, v_2 et v_3 par f_0 puis par f_1.
   (c) On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}_2$.
   Que vaut $Q^{-1}M_0Q$ et $Q^{-1}M_1Q$? (sans calculer Q^{-1})
   (d) Les endomorphismes f_0 et f_1 commutent-ils ? c'est à dire a-t-on $f_0 \circ f_1 = f_1 \circ f_0$?