Fiche d'exercices n°8 : réduction des endomorphismes - 10 décembre 2024

Exercice 0 : Pour les matrices suivantes, déterminer les valeurs propres, les dimensions des sous-espaces propres, et une base pour chaque sous-espace propre. Revenir sur ces exemples en fin de chapitre, pour dire si ces matrices sont diagonalisables ou non ; lorsque la matrice est diagonalisable, préciser les matrices de passage.

A=$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ D=$\begin{pmatrix} 8 & 25 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}$ E=$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

F=$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ G=$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ H=$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Exercice 0bis : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $u(x,y,z) = (5x-4y-4z, 4x-3y-4z, 4x-4y-3z)$. u est-il diagonalisable ?

Exercice 1 : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique M=$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2, et montrer qu'il existe α et β réels tels que $M^2 = \alpha M + \beta I_3$.
2. M est-elle inversible ? 0 est-il valeur propre de u ?
3. Soit λ une valeur propre de u. Montrer en utilisant la question 1., que λ est égal à 3 ou -1.
   Quel lien avez-vous montré à ce stade entre $\mathrm{Sp}(u)$ et $\{3,-1\}$?
4. En déduire les valeurs propres de u, déterminer la dimension des sous-espaces propres associés.
5. M est-elle semblable à une matrice diagonale ? Si oui, laquelle ? Y a-t-il unicité ?
   Donner une relation matricielle entre M et cette matrice diagonale.

Exercice 2 : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $U_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que U_1, U_2, U_3, U_4 sont des vecteurs propres de J. Quelle information avez-vous sur le spectre de J ?
2. Justifier que la famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On la note $\mathcal{B}$.
   Ecrire P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.
3. Sans calculer la matrice P^{-1}, expliciter la matrice $P^{-1}JP$.
4. Déterminer sans nouveau calcul, le spectre de J et une base de chaque espace propre de J.
   Comment aurions-nous pu répondre à cette question, dès la question 1., et sans calcul supplémentaire ?
5. Trouver de même une méthode, sans calculer la matrice P^{-1}, pour expliciter la matrice $P^{-1}KP$.
6. Pour a et b réels,
   on définit $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ a & b & a \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$
   Exprimer $M(a,b)$ en fonction de J et de K.
   En déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable.
   Déterminer le spectre de $M(a,b)$.
7. Pour quelles valeurs de a et b, $M(a,b)$ est-elle inversible ? Donner alors $[M(a,b)]^{-1}$.

Exercice 3 : Soit f l'application qui, à tout P de $E = \mathbb{R}_n[X]$ associe $f(P) = 2P(2X) - (4X+1)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E. Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ?
2. Déterminer $\ker f$.

Exercice 4 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et φ définie par : Pour tout M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = AM - MA$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer sa matrice T dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Justifier que φ est diagonalisable.
3. Calculer $T^3 - 4T$. Qu'en déduire sur le spectre de φ ?
4. Déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}TP$ soit diagonale.

Exercice 5 : Soit a un réel et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & -a & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que 2 est valeur propre de A.

2. A est-elle inversible ? En déduire une autre valeur propre de A et une base du sous-espace propre associé.
3. Déterminer la (ou les) valeur(s) du réel a pour laquelle (ou lesquelles), A n'admet pas d'autres valeurs propres que celles trouvées précédemment.
4. Pour cette (ou ces) valeur(s) de a, déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 2.
5. Facultatif : on revient au cas général, a quelconque. Calculer AV (V la matrice donnée en début d'énoncé). En déduire le spectre de la matrice A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, donnez une matrice diagonale semblable à A, et un lien matriciel entre elles.

Exercice 6 : Dire si les matrices A et B sont semblables dans chacun des cas :

1- A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&4&0\\2&3&9\end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$ **2-** A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ **3-** A=$\begin{pmatrix}1&2&0\\1&2&0\\2&4&9\end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&9&0\\1&3&2\end{pmatrix}$

4- A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ **5-** A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

Exercice 7 : Des cas particuliers :

1. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$, telle que la somme des termes de chaque ligne est égale à la même constante c. Justifier que c est une valeur propre de A.
2. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et de rang 1, justifier que $0<\text{card}(\text{Sp}(A))\leq 2$.
3. Soit A=$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ et soit B=$\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\1&2&-2&-1\\1&2&-2&-1\\1&2&-2&-1\end{pmatrix}$
   Sans calcul, justifier que A est semblable à une matrice diagonale.
   Sans calcul, et en utilisant l'exercice 8 fiche 7, justifier que B n'est pas semblable à une matrice diagonale.

Exercice 8 : Vrai-Faux

1. Toute matrice inversible est diagonalisable.
2. 0 est valeur propre d'une matrice carrée $A \Leftrightarrow A$ n'est pas inversible.
3. Deux matrices qui ont les mêmes valeurs propres sont semblables.
4. Deux matrices qui ont les mêmes valeurs propres et qui sont diagonalisables sont semblables.
5. Soit D une matrice carrée et λ une valeur propre de D.
   (a) Si D est diagonale alors dim(E_λ(D)=nombre d'apparition de λ sur la diagonale de D.
   (b) Si D est triangulaire alors dim(E_λ(D)=nombre d'apparition de λ sur la diagonale de D.
6. Si λ est valeur propre de A, alors λ^2 est valeur propre de A^2.
7. Si λ^2 est valeur propre de A^2, alors λ est valeur propre de A.

Exercice supplémentaire 9 : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = f \circ f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
(1) Soit λ une valeur propre de f, montrer que $\lambda = 0$.
(2) Montrer : dim ker$f \geq 1$.
(3) Déterminer le spectre de f.
(4) Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $(f(x_0), f^2(x_0))$ est libre. En déduire une minoration de rg$f$.
(5) Justifier que la juxtaposition d'une base de ker$f$ et d'une base de vect$(x_0, f(x_0))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
(6) En déduire une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$, telle que la matrice de f dans cette base soit $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Exercice supplémentaire 10 : Soit $A = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A et de B, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.
2. Peut-on en déduire que A et B sont deux matrices semblables ?
3. Résoudre l'équation $AP = PB$ d'inconnue la matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Les matrices A et B sont-elles semblables ?