Fiche d'exercices n°10 : Intégrales sur un segment
7 janvier 2025

Exercice 1 : Qui vaut quoi ?

(1) $\int\limits_0^1 \frac{t}{1+t}dt$	$(a) 1-\ln 2$
(2) $\int\limits_0^2 (1-\|1-x\|)^3 dx$	$(b) \pi/4$
(3) $\int\limits_1^2 2^x dx$	$(c) 2/3$
(4) $\int\limits_1^e \frac{\sqrt{\ln t}}{t}dt$	$(d) 1/2$
(5) $\int\limits_1^2 \ln t dt$	$(e) 2-\ln 2$
(6) $\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{x^2+1}dx$	$(f) 0$
(7) $\int\limits_{-2}^2 \frac{1}{x^2+4}dx$	$(g) 3\ln(3/4)$
(8) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan x)^2 dx$	$(h) -1+\ln 4$
(9) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t}{\cos t}dt$	$(i) \pi/4-\ln(\sqrt{2})$
(10) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t}dt$	$(j) \pi/4$
(11) $\int\limits_2^3 \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)dt$	$(k) 1+\ln 2$

Exercice 2 : Avec des changements de variables...

(1) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt$ changt de variable $u=\cos t$	$(a) \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}\right)$
(2) $\int\limits_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt$ changt de variable $y=\pi-t$	$(b) \frac{\pi^2}{4}$
(3) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ changt de variable $x=\cos t$	$(c) \frac{\pi}{4}$
(4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{3+2\cos(2t)}dt$ changt de variable $x=\cos t$	$(d) \frac{\pi}{2}$
(5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(2t)}dt$ changt de variable $x=\tan t$ Indication : exprimer $1+\tan^2(t)$ en fonction de $\cos^2(t)$	$(e) \frac{1}{2}\left(\arctan 2-\arctan\sqrt{2}\right)$

Exercice 3 : Et maintenant dérivons...

(1)Pour $x>0$: $f(x)=\int\limits_x^1 \frac{\sin t}{t^2}dt$	$(a) f'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$
(2)Pour $x>0$: $f(x)=\int\limits_1^{2x} \frac{\sin t}{t^2}dt$	$(b) f'(x)=\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^2}$
(3)Pour $x>0$: $f(x)=\int\limits_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}dt$	$(c) f'(x)=-\frac{\sin x}{x^2}$
(4)Pour $x>1$: $f(x)=\int\limits_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$	$(d) f'(x)=\frac{\sin(2x)}{2x^2}$