Exercice 4 : Faire une représentation graphique illustrant la propriété des sommes de Riemann.
Puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans chacun des cas ci-dessous.
Voici 5 valeurs de limites, à quelle suite sont-elles associées ? (a) $\frac{4}{\pi^2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $1-\frac{\pi}{4}$ (e) $\frac{9\pi}{2}$

$u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}$	$u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k\sin\dfrac{k\pi}{2n}$	$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+nk^2}$	$u_n = n\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(n+k)^2}$	$u_n = sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\left(2+\cos\dfrac{k\pi}{n}\right)^2$

Exercice 5 : Pour n de $\mathbb{N}*$, on note $I_n = \int\limits_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.
A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour $n \geq 2$, I_n en fonction de I_{n-1}.
En déduire pour tout n de $\mathbb{N}*$, une expression de I_n en fonction de n.

Exercice 6 : soit $f : x \mapsto f(x) = \int\limits_x^{2x} \dfrac{\sin t}{t^2}dt$.

1. Justifier que H est définie sur le domaine $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
2. Etudier la parité de f.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et donner sa dérivée.
5. Soit $g : t \mapsto \dfrac{sint - t}{t^2}$. Démontrer que g est prolongeable par continuité en 0.
6. Exprimer f en fonction de la fonction g, en déduire $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.
7. Question subsidiaire : Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette nouvelle fonction prolongée.
   Etudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 7 : études de suites définies à l'aide d'une intégrale :

1. Soit n un entier naturel non nul, et $I_n = \int\limits_1^e x^2(\ln x)^n dx$.
   (a) Calculer I_1. Etudier la convergence de la suite $(I_n)_n$.
   (b) Montrer : $\forall x \in [1, e], 0 \leq \ln x \leq \dfrac{x}{e}$. Préciser la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
   (c) Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n, en déduire la convergence de la suite $(nI_n)_n$.
2. Deux autres exemples :
   (a) Pour tout entier naturel n, calculer $u_n = \int\limits_0^1 t^n dt$. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?
   (b) Soit f fonction continue de [0,1] dans $\mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit $w_n = \int\limits_0^1 t^n f(t)dt$. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
3. Question subsidiaire : $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit $v_n = \int\limits_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$.
   (a) Calculer $v_{n+1} + v_n$ en fonction de n.
   (b) Pour $n \geq 1$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S_n en fonction de v_0 et v_n.
   (c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et calculer sa somme.