Fiche d'exercices 9 : les équations différentielles — décembre 2025

Equations différentielles linéaires ou autres ?

Voici des exemples d'équations différentielles, préciser pour chacune d'elle, s'il s'agit d'une équation linéaire ou non.

(a) $y'(t) = y(t)\left(1 - \dfrac{y(t)}{4,8}\right)$ (b) $y'(t) = -y(t) + \cos(t)$ (c) $y''(t) - 2y'(t) + 7y(t) = 0$

(d) $y'(t) = y(t) - y^2(t)$ (e) $y'(t) + \tan(t)y(t) = \cos(t)$ (f) $y'(t) + 0.3y(t) = 0$

(g) $2t(t+1)y'(t) + (3t+4)y(t) = 2t(t+1)^{3/2}$ (h) $t^2y''(t) - ty'(t) - 3y(t) = 0$ (i) $y'(t) = ay(t)\ln\left(\dfrac{K}{y(t)}\right)$.

Premiers exercices :

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle $2t(t+1)y'(t) + (3t+4)y(t) = 2t(t+1)^{3/2}$ d'inconnue y fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Indication : Vous pourrez utiliser l'égalité suivante : $3t + 4 = 4(t+1) - t$.

Exercice 2 : L'objectif est de résoudre l'équation différentielle (E) $(t-1)y'' - ty' + y = 1$ d'inconnue y définie sur $]1, +\infty[$.

1. Montrer que si y est solution de l'équation (E), alors $y''' = y''$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 3 : L'objectif est de résoudre l'équation différentielle (E_1) $t^2y'' - ty' - 3y = 0$ d'inconnue y définie sur $]0, +\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_2) $y'' - 2y' - 3y = 0$.
2. Soit y une solution de l'équation (E_1). Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $u \in \mathbb{R}$, $g(u) = y(e^u)$.
   Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E_2).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1).

Exercices sur des équations différentielles autonomes :

Une équation différentielle autonome est une équation différentielle dans laquelle n'intervient pas la variable t.

Exemples : (1) $y' = 1 + y^2$ (2) $y' = y^2$ (3) $y' = ay\ln\left(\dfrac{K}{y}\right)$

Exercice 4 : L'objectif est de résoudre l'équation différentielle (E) $y' = 1 + y^2$ d'inconnue y définie sur un intervalle I.

1. Montrer que : y est solution de l'équation $(E) \Leftrightarrow$ il existe un réel A tel que pour tout t de I, $\arctan(y(t)) = t + A$.
2. En déduire une condition nécessaire sur l'intervalle de définition I d'une solution de (E).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) définies sur un intervalle maximal.

Exercice 5 : L'objectif est de résoudre l'équation différentielle (E) $y' = y^2$ d'inconnue y définie sur un intervalle I.

1. Recherche d'une solution y qui ne s'annule pas sur I :
   Soit y une solution de (E) qui ne s'annule pas sur I :
   (a) Montrer que : y est solution de l'équation $(E) \Leftrightarrow$ il existe un réel A tel que pour tout t de I, $y(t) = \dfrac{1}{A-t}$.
   (b) En déduire une condition nécessaire sur l'intervalle de définition I d'une solution de (E).
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) qui ne s'annule pas sur leur intervalle de définition.
2. Recherche d'une solution y qui s'annule au moins une fois sur I :
   • On admet le théorème de Cauchy-Lipschitz : Pour tous réels t_0 et y_0, il existe une unique fonction y solution de l'équation (E) définie sur un intervalle I (maximal), telle que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.
   C'est-à-dire à une condition initiale donnée, il existe une unique solution de l'équation (E).
   • On peut remarquer que la fonction nulle définie sur $I = \mathbb{R}$ est solution de (E).
   • Déterminer alors l'ensemble des fonctions y solution qui s'annulent au moins une fois.
3. Conclusion : Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (E) définie sur un intervalle maximal ?

Exercice 6 : L'objectif est de résoudre l'équation différentielle (E) $y' = ay\ln\left(\dfrac{K}{y}\right)$ d'inconnue y définie sur un intervalle I. a et K sont deux réels donnés, strictement positifs.

Au vu de l'équation (E), on recherche une solution y qui ne s'annule pas sur I et qui est strictement positive sur I.

1. Soit y une solution de (E) définie sur I.
   Soit u la fonction définie sur I par : Pour tout $t \in I$, $u(t) = \ln\left(\dfrac{K}{y(t)}\right)$.
   (a) Montrer que la fonction u est solution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre.
   (b) En déduire qu'il existe un réel A tel que pour tout t de I, $y(t) = \dfrac{K}{e^{Ae^{-at}}}$.
   (c) Déterminer une condition nécessaire sur l'intervalle I.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) définies sur des intervalles maximaux.