Corrigé de la fiche 9: les équations différentielles

Exercice 1: Résoudre l'équation (E): $2t(t+1)y'(t)+(3t+4)y(t)=2t(t+1)^{3/2}$ d'inconnue y définie sur sur $]0,+\infty[$.
C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre: La mettre sous forme résolue. On cherhce alors les solutions définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

► Etape 1: Résolution de l'équation homogène associée notée (E_0): $y'(t)+\dfrac{3t+4}{2t(t+1)}y(t)=0$.

Or une primitive sur $]0,+\infty[$ de $t\mapsto \dfrac{3t+4}{2t(t+1)}=\dfrac{4(t+1)-t}{2t(t+1)}=\dfrac{2}{t}-\dfrac{1}{2(t+1)}$ est: $t\mapsto 2\ln t-\dfrac{1}{2}\ln(t+1)$.

De plus: $2\ln t-\dfrac{1}{2}\ln(t+1)=\ln\left(t^2\right)-\ln\left(\sqrt{t+1}\right)=\ln\left(\dfrac{t^2}{\sqrt{t+1}}\right)$

$$\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions de } (E_0) \text{ est: } \left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t)=A\dfrac{\sqrt{t+1}}{t^2}\end{array} /A\in\mathbb{R}\right\}}$$

► Etape 2: Recherche d'une solution particulière de l'équation (E):
On utilise la méthode de la variation de la constante. On recherche une fonction solution sous la forme: $y:t\mapsto A(t)\dfrac{\sqrt{t+1}}{t^2}$.

y est solution de (E) $\Leftrightarrow y'(t)+\dfrac{3t+4}{2t(t+1)}y(t)=\sqrt{t+1}\Leftrightarrow A'(t)=t^2$

$$\boxed{\text{Ainsi la fonction } y_0 \text{ définie par: pour tout } t>0,\ y_0(t)=\dfrac{t^3}{3}\dfrac{\sqrt{t+1}}{t^2}=\dfrac{1}{3}t\sqrt{t+1} \text{ est une solution particulière de (E).}}$$

► Etape 3: Conclusion:

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de (E) est: } \left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t)=\dfrac{1}{3}t\sqrt{t+1}+A\dfrac{\sqrt{t+1}}{t^2}\end{array} /A\in\mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 2: Résoudre l'équation (E): $(t-1)y''-ty'+y=1$ d'inconnue y définie sur $]1,+\infty[$.

► On suppose que y est solution de l'équation (E):
alors pour tout réel t de $]1,+\infty[$, $(t-1)y''-ty'+y=1$
donc en dérivant cette équation, pour tout réel $t>1$, $(t-1)y'''+y''-ty''-y'+y'=0$ donc $(t-1)y'''-(t-1)y''=0$
Or $t-1\neq 0$, donc pour tout réel t de $]1,+\infty[$, $y'''=y''$.

$\boxed{\text{Nous venons de montrer: Si } y \text{ est solution, alors } y'''=y''.}$

► Soit y une solution de l'équation (E): notons $z=y''$.
Alors z est solution de l'équation différentielle linéaire du 1er ordre $z'-z=0$.
Donc il existe un réel A tel que: $\forall t\in]1,+\infty[$, $z(t)=Ae^t$.
Donc $y''(t)=Ae^t$, donc il existe un réel B tel que $\forall t\in]1,+\infty[$, $y'(t)=Ae^t+B$,
donc il existe un réel C tel que $\forall t\in]1,+\infty[$, $y(t)=Ae^t+Bt+C$,

$\boxed{\text{Nous venons de montrer:}}$

$\boxed{\text{Si } y \text{ est solution, alors il existe trois réels } A,B,C \text{ tels que: } \forall t\in]1,+\infty[,\ y(t)=Ae^t+Bt+C.}$

► Réciproquement: Soit une fonction y de ce type, c'est-à-dire définie par:
$\forall t\in]1,+\infty[$, $y(t)=Ae^t+Bt+C$ avec A,B,C réels.
Alors $y'(t)=Ae^t+B$, et $y''(t)=Ae^t$. D'où $(t-1)y''(t)-ty'(t)+y=Ae^t(t-1)-t(Ae^t+B)+Ae^t+Bt+C=C$
D'où: y est solution de l'équation (E) équivaut à $C=1$.

Conclusion: $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de (E) est } \left\{\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t)=Ae^t+Bt+1\end{array} \backslash A,B \text{ réels}\right\}}.$

Remarque: Pour résoudre l'équation (E), nous avons suivi un raisonnement de type analyse-synthèse.

Exercice 3: Résoudre (E_1) $t^2y'' - ty' - 3y = 0$ d'inconnue y définie sur $]0, +\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_2) $y'' - 2y' - 3y = 0$: C'est une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants.
   L'équation caractéristique associée est: $x^2 - 2x - 3 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 16$, donc les deux racines sont $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$.

> Donc l'ensemble des solutions de (E_2) est: $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) = Ae^{3t} + Be^{-t} \end{array} /A, B \in \mathbb{R} \right\}$

2. Soit y une solution de l'équation (E_1). Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: pour tout $u \in \mathbb{R}$, $g(u) = y(e^u)$.
   Alors g est 2-fois dérivable et $g'(u) = e^u y'(e^u)$ et $g''(u) = e^u y'(e^u) + (e^u)^2 y''(e^u)$.
   Ainsi: $g''(u) - 2g'(u) - 3g(u) = e^u y'(e^u) + (e^u)^2 y''(e^u) - 2e^u y'(e^u) - 3y(e^u) = e^u \left((e^u)^2 y''(e^u) - e^u y'(e^u) - 3y(e^u)\right)$.
   Or y est solution de l'équation (E_1), et pour tout réel u, $t = e^u$ appartient à $]0, +\infty[$, donc pour tout réel u, $g''(u) - 2g'(u) - 3g(u) = 0$.

> Donc g est solution de l'équation différentielle (E_2).

3. Pour résoudre l'équation (E_1), nous suivons un raisonnement de type analyse-synthèse:
   ▶ Analyse: Soit y une solution de l'équation (E_1) et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: pour tout $u \in \mathbb{R}$, $g(u) = y(e^u)$.
   Alors g est solution de l'équation (E_2), donc il existe A et B réels tels que: Pour tout réel u, $g(u) = Ae^{3u} + Be^{-u}$,
   et $y(e^u) = A(e^u)^3 + B\dfrac{1}{e^u}$.
   De plus pour tout réel $t > 0$, il existe un unique réel u tel que $t = e^u$, c'est $u = \ln(t)$, et donc $y(t) = At^3 + B\dfrac{1}{t}$.

> Nous avons montré: Si y est solution de (E_1) alors il existe A, B réels tels que pour tout $t > 0, y(t) = At^3 + B\dfrac{1}{t}$.

   ▶ Synthèse: Soient A, B réels tels et une fonction y définie par: pour tout $t > 0, y(t) = At^3 + B\dfrac{1}{t}$.
   Alors $y'(t) = 3At^2 - B\dfrac{1}{t^2}$, $y''(t) = 6At + 2B\dfrac{1}{t^3}$,
   donc $t^2y''(t) - ty'(t) - 3y(t) = ... = 0$, donc y est solution de (E_1).

> Ainsi l'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) = At^3 + B\dfrac{1}{t} \end{array} /A, B \text{ réels} \right\}$.

Exercice 4: Résoudre (E) $y' = 1 + y^2$ d'inconnue y définie sur un intervalle I.

1. y est solution de l'équation $(E) \Leftrightarrow \dfrac{y'}{1+y^2} = 1$ car $1 + y^2 \neq 0$.
   donc y est solution de l'équation $(E) \Leftrightarrow (\arctan(y))' = 1 \Leftrightarrow$ il existe un réel A tel que pour tout réel t de I, $\arctan(y(t)) = t + A$

> On a donc prouvé: y est solution de l'équation $(E) \Leftrightarrow$ il existe un réel A tel que pour tout t de I, $\arctan(y(t)) = t + A$.

2. Ainsi, si y est solution de (E) sur l'intervalle I, alors il existe un réel A tel que pour tout t de I, $\arctan(y(t)) = t + A$, donc pour tout t de I, $t + A \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc pour tout t de I, $-A - \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant -A + \dfrac{\pi}{2}$.

> Donc si y est solution de (E) sur l'intervalle I, alors il existe un réel A tel $I \subset \left]-A - \dfrac{\pi}{2}, -A + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. Nous menons ici un raisonnement de type analyse synthèse.
▶ L'analyse: D'après ce qui précède, si y est solution de (E) sur l'intervalle I, alors il existe un réel A tel que $I \subset \left]-A-\frac{\pi}{2}, -A+\frac{\pi}{2}\right[$, et pour tout t de I, $\arctan(y(t)) = t + A$, donc $y(t) = \tan(t + A)$.
▶ La synthèse: Soit A un réel, et soit y une fonction définie sur $I = \left]-A-\frac{\pi}{2}, -A+\frac{\pi}{2}\right[$, par: pour tout t de I, $y(t) = \tan(t + A)$.
Alors y est déribale sur I et $y'(t) = 1 + (\tan(t + A))^2 = 1 + y^2(t)$, donc y est solution de l'équation (E).

L'ensemble des solutions de (E) définies sur un intervalle maximal est $\left\{ \begin{array}{ccc} \left]-A-\frac{\pi}{2}, -A+\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) = \tan(t + A) \end{array} /A \text{ réel} \right\}$.

Exercice 5: Résoudre $y' = y^2$ d'inconnue y définie sur un intervalle I.

1. Recherche d'une solution y qui ne s'annule pas sur I:
Soit y une solution de (E) qui ne s'annule pas sur I:

(a)

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de l'équation } (E) &\Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} = 1 \text{ car } y \text{ ne s'annule pas sur I.} && (1)\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-1}{y}\right)' = 1 && (2)\\ &\Leftrightarrow \text{il existe un réel } A \text{ tel que pour tout } t \text{ de I, } \frac{-1}{y(t)} = t + A && (3)\\ &\Leftrightarrow \text{il existe un réel } A \text{ tel que pour tout } t \text{ de I}, y(t) = \frac{-1}{A+t} && (4)\\ &\Leftrightarrow \text{il existe un réel } A \text{ tel que pour tout } t \text{ de I}, y(t) = \frac{1}{A-t}. && (5) \end{aligned}$$

Donc y est solution de l'équation $(E) \Leftrightarrow$ il existe un réel A tel que pour tout t de I, $y(t) = \frac{1}{A-t}$.

(b) Ainsi, si y est solution de (E) sur l'intervalle I, alors il existe un réel A tel que pour tout t de I, $y(t) = \frac{1}{A-t}$. Donc pour tout t de I, $A - t \neq 0$, donc $t > A$ ou $t < A$.

Donc si y est une solution de (E) sur I qui ne s'annule pas, alors il existe un réel A tel $I \subset]-\infty, A[$ ou $I \subset]A, +\infty[$.

(c) Nous menons ici un raisonnement de type analyse synthèse.
▶ L'analyse: D'après ce qui précède, si y est une solution de (E) sur l'intervalle I qui ne s'annule pas, alors il existe un réel A tel que tel $I \subset]-\infty, A[$ ou $I \subset]A, +\infty[$, et pour tout t de I, $y(t) = \frac{1}{A-t}$.
▶ La synthèse: Soit A un réel, et soit y une fonction définie sur $I =]-\infty, A[$ ou $I =]A, +\infty[$, par: pour tout t de I, $y(t) = \frac{1}{A-t}$.
Alors y est dérivable sur I, $y'(t) = (-1) \times \frac{-1}{(A-t)^2} = y^2(t)$, donc y est solution de l'équation (E).
Ainsi l'ensemble des solutions de (E) qui ne s'annule pas définies sur un intervalle maximal est S, avec:

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty, A[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) = \frac{1}{A-t} \end{array} /A \text{ réel} \right\} \bigcup \left\{ \begin{array}{ccc}]A, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) = \frac{1}{A-t} \end{array} /A \text{ réel} \right\}.$$

2. Recherche d'une solution y qui s'annule au moins une fois sur I:
• On admet le théorème de Cauchy:
Pour tous réels t_0 et y_0, il existe une unique fonction y solution de l'équation (E) définie sur un intervalle I (maximal), telle que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.
C'est-à-dire à une condition initiale donnée, il existe une unique solution de l'équation (E).

• On peut remarquer que la fonction nulle définie sur $I = \mathbb{R}$ est solution de (E). • soit y une solution qui s'annule au moins une fois. ALors il existe t_0 réel, tel que $y(t_0) = 0$.
Or d'après le théorème de Cauchy, il existe une unqiue fonction solution de l'équation qui vérifie $y(t_0) = 0$, et il se trouve que la fonction nulle vérifie cette condition, donc y est la fonction nulle.

Il existe une unique solution qui s'annule au moins une fois, c'est la fonction nulle.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) définie sur un intervalle maximal est: $S \cup \{$La fonction nulle défnie sur $\mathbb{R}\}$

Exercice 6: Résoudre (E) $y' = ay \ln\left(\frac{K}{y}\right)$ d'inconnue y définie sur un intervalle I.
a et K sont deux réels donnés, strictement positifs.
Au vu de l'équation (E), on recherche une solution y qui ne s'annule pas sur I et qui est strictement positive sur I.

1. Soit y une solution de (E) définie sur I.
   Soit u la fonction définie sur I par: Pour tout $t \in I$, $u(t) = \ln\left(\frac{K}{y(t)}\right)$.
   (a) La fonction u est bien définie, car y est strictement positive sur I, et u est dérivable sur Y, comme composée de fonctions dérivables.
   D'où pour tout t de I: $u'(t) = -K\frac{y'(t)}{(y(t))^2}\frac{y(t)}{K}$.
   Or y est solution de (E), donc $u'(t) = -ay(t)\ln\left(\frac{K}{y}\right)\frac{1}{y(t)} = -au(t)$

   Donc la fonction u est solution de l'équation différentielle linéaire du 1er ordre: $z' = -az$.

   (b) Ainsi il existe un réel A tel que pour tout t de I, $u(t) = Ae^{-at}$. Or $\frac{K}{y(t)} = e^{u(t)}$, donc $y(t) = \frac{K}{e^{u(t)}}$

   Donc il existe un réel A tel que pour tout t de I, $y(t) = \frac{K}{e^{Ae^{-at}}}$.

   (c) Comme l'exponentielle ne s'annule pas, il n'y a pas de condition supplémentaire sur I.

   Pas de condition supplémentaire sur I, c'est-à-dire $I \subset \mathbb{R}$.

2. Nous avons mené ici un raisonnement de type analyse synthèse.
   ▶ L'analyse: D'après ce qui précède, si y est une solution de (E) sur l'intervalle I, alors il existe un réel A tel que pour tout t de I, $y(t) = \frac{K}{e^{Ae^{-at}}}$.
   ▶ La synthèse: Soit A un réel, et soit y une fonction définie sur $I = \mathbb{R}$, par: pour tout t de I, $y(t) = \frac{K}{e^{Ae^{-at}}}$.
   Alors y est dérivable sur I et après calcul de y', on montre que y est solution de l'équation (E).

Ainsi l'ensemble des solutions de (E) définies sur un intervalle maximal est $S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) = \frac{K}{e^{Ae^{-at}}} \end{array} /A \text{ réel} \right\}$.