BCPST2-2 - Programme de colle de Mathématiques - 2024-2025

Semaine du lundi 13 janvier 2025 au vendredi 17 janvier 2025 Semaine 12

Format des colles : on reste sur le format classique, le trinôme ensemble en 1 heure

Valeur propre - Sous-espace propre pour un endomorphisme ou une matrice carrée

- Définitions d'une valeur propre, du spectre, d'un vecteur propre, d'un sous-espace propre.
- Caractérisation d'une valeur propre à l'aide du rang.
- Dimension d'un sous-espace propre par le théorème du rang.
- Valeurs propres d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.
- Propriétés pour la matrice transposée.
- Cas particulier des matrices 2×2.
- Propriété : Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres.

Propriétés de famille finie de vecteurs propres

- Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Toute famille finie de vecteurs obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- dimE$=n$. Un endomorphisme de E (ou une matrice $n \times n$) admet au plus n valeurs propres distinctes.
- dimE$=n$. La somme des dimensions des sous-espaces propres d'un endomorphisme de E (ou d'une matrice $n \times n$) est inférieure ou égale à n.

Endomorphismes et matrices diagonalisables

- Définitions.
- Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
- Condition suffisante de diagonalisation : dimE$=n$. Un endomorphisme de E possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable, et chaque sous-espace propre est de dimension 1.
- Condition suffisante de diagonalisation, théorème spectral : Toute matrice symétrique réelle M est diagonalisable et il existe P et D deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que P est inversible, D est diagonale et $M = PDP^{-1}$.

Questions de cours : énoncé et démonstration

1. Nombre maximal de valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie ou d'une matrice carrée.
2. DimE$=n$. Propriété de la somme des dimensions des sous-espaces propres d'un endomorphisme de E.
3. DimE$=n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est diagonalisable alors la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à n.
4. dimE$=n$. Un endomorphisme de E possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable, et chaque sous-espace propre est de dimension 1