Exercice 1 : Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

a- $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^3}{x^3} dx$ **b-** $\int_0^1 \frac{\ln t}{t} dt$ **c-** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ **d-** $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t+1)(t^2+1)} dt$

e- $\int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x)^3 dx$ **f-** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)-1}{t} dt$ **g-** $\int_0^1 \frac{t\ln t}{t^2-1} dt$ **h-** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Exercice 2 : Soit $a > 0$. Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx$.
Si elle converge, calculer sa valeur en fonction de a (Vous pourrez d'abord traiter le cas où $a = 1$, puis ensuite le cas général.)

Exercice 3 : Changements de variables

1. Soit $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt$.
   A l'aide du changement de variable $x = e^t$, justifier que I_1 est une intégrale convergente et donner sa valeur.
2. Soit $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
   A l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$, justifier que I_2 est une intégrale convergente et donner sa valeur.
3. Soit $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} + t^{3/2}} dt$.
   A l'aide du changement de variable $t = x^2$, montrer que I_3 est une intégrale convergente et donner sa valeur.

Exercice 4 : On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$.
1. Etudier la nature de I_n, $n \geq 1$.
2. Soit $n \geq 1$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

Exercice 5 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, donner $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n+2}e^{-x}$.
   En déduire que l'on peut trouver un réel $M_n > 0$, tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, si $x > M_n$ alors $0 < x^n e^{-x} < \frac{1}{x^2}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ est convergente.
3. Question bonus : Pour tout entier naturel n, on définit le réel $u_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
   A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre u_n et u_{n+1}.
   En déduire une expression simplifiée de u_n en fonction de n.

Exercice supplémentaire 6 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$.
   Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α.
2. Soit g la fonction définie sur $[\alpha, +\infty[$, par : $g(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$.
   Montrer que l'intégrale $\int_\alpha^{+\infty} g(t)dt$ est convergente, et donner sa valeur.
3. Montrer que l'intégrale $\int_\alpha^{+\infty} tg(t)dt$ est convergente, et donner sa valeur.

Exercice supplémentaire 7 :
Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ avec L un réel.

On suppose que L est un réel vérifiant $L > 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est divergente.
Remarque : on montrerait la même conclusion si $L < 0$, ou si $L = +\infty$ ou $-\infty$.
Comment formuler différemment, le résultat prouvé dans cet exercice ?