Exercice 1 : soit c un réel et soit $f(x) = \dfrac{c}{e^x + e^{-x}}$.
Déterminer le réel c, afin que f soit une densité de probabilité, représenter l'allure du graphe de f.

Exercice 2 : soit a un réel et soit f définie par : $f(x) = 0$ si $x \leq 1$ et $f(x) = \dfrac{a}{x^2 - 1/4}$ si $x > 1$.

1. Déterminer le réel a, afin que f soit une densité de probabilité, représenter graphiquement f.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. (a) Calculer $P(-1 \leq X \leq 3)$. Etudier l'existence de l'espérance de X.
   (b) Soit $Y = \dfrac{1}{X}$. déterminer la loi de probabilité de Y. En particulier, Y est-elle une variable aléatoire à densité ? Si oui, déterminer une densité de probabilité de Y.

Exercice 3 : loi exponentielle, loi uniforme. Soit $X_1 \hookrightarrow Exp(\alpha)$ avec $\alpha > 0$ et soit $X_2 \hookrightarrow U([-2, 2])$.

1. Soit a un réel, $a > 0$. Justifier que aX_1 est une variable aléatoire à densité. En déterminer une densité.
2. Soit $Y = -X_1$. Justifier que Y est une variable aléatoire à densité. En déterminer une densité.
3. Soit $T = [X_1]$ (partie entière). Déterminer la loi de probabilité de T. Reconnaître la loi de la variable $1 + T$. En déduire, $E(T)$ et $\text{var}(T)$.
4. Soit $Z = X_2^2$. Justifier que Z est une variable aléatoire à densité. En déterminer une densité.

Exercice 4 :
1) Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$. Montrer que f est une densité de probabilité, représenter-la graphiquement.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f. On note F_X sa fonction de répartition.
Interpréter graphiquement la valeur de $F_X(-x) + F_X(x)$. Le démontrer. Que vaut $F_X(0)$?
3) Calculer $F_X(x)$ pour $x > 1$. En déduire $F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4) Soit $Y = \ln |X|$. Montrer que Y suit une loi usuelle.
5) Soit $Z = \dfrac{1}{X}$. Z admet-elle une espérance ? La calculer le cas échéant. (Puis facultatif : Déterminer la loi de Z.

Exercice 5 : Soit λ un réel strictement positif.
Pour tout $t > 0$, on définit la variable aléatoire N_t qui donne le nombre de personnes qui entrent dans un magasin entre les instants 0 et t. On suppose que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Y_n qui mesure le temps d'attente de l'arrivée du $n - ime$ client dans le magasin depuis l'instant 0.
(1) Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$: si $(Y_n \leq t)$, comparer N_t et n.
En déduire une expression de l'événement $(Y_n \leq t)$ en fonction de N_t et n.
(2) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et de déterminer une densité.

Exercice 6 : X et Y sont 2 v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ, $\lambda \neq \mu$.
(1) Déterminer la loi de $Z = min(X, Y)$. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
(2) Déterminer la loi de $T = X - Y$. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
(3) Puis déterminer les lois de $U = \dfrac{1}{2}(X + Y)$ et $V = \dfrac{1}{2}(X - Y)$. Calculer les espérances de U et V.

Exercice 7 : Une machine fonctionne avec n composants. On note $T_1, T_2, ...T_n$ les variables aléatoires qui donnent la durée de bon fonctionnement de chaque composant de 1 à n. les variables $(T_k)_k$ sont indépendantes et suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre α.
(1) Soit $t > 0$. N_t compte le nombre de composants défaillants au temps t.
Déterminer la loi de N_t , son espérance et sa variance.
(2) Pour un entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au temps de bon fonctionnement de la machine. Déterminer la loi de S_n, dans chacun des cas suivants :
(a) La machine fonctionne avec des composants en série, c'est à dire qu'elle ne fonctionne plus dès qu'un composant est défaillant.
(b) La machine fonctionne avec des composants en parallèle, c'est à dire qu'elle ne fonctionne tant que au moins un composant fonctionne.

Exercice 8 : Autour de lois normales :
Soient X et Y deux variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite et indépendantes.
(1) Soit $T = e^X$. Montrer que T admet une espérance et la calculer.
(2) Soit Z=X^2. Exprimer la fonction de répartition de Z en fonction de $z \mapsto F_X(\sqrt{z})$.
En déduire que Z est une variable aléatoire à densité. Déterminer, alors une densité de Z.
(3) Question facultative : Montrer que S=X^2+Y^2 suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Indication : On pourra effectuer le changement de variable : $u = \phi(t) = \dfrac{2t}{s} - 1$, et admettre qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$ est la fonction arcsin.

Exercice 9 : Pour obtenir des simulations de variables aléatoires en Python : Soit $X \hookrightarrow U([0,1])$.

1. Lois discrètes :
   1- Soit Z une variable aléatoire telle que $Z(\Omega) = 1, 2, 3, 4$ et pour tout k de 1 à 4, $P(Z = k) = p_k$ ($\sum p_k = 1$).
   Démontrer que la variable aléatoire Y définie par : $Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \leq p_1 \\ 2 & \text{si } p_1 < X(\omega) \leq p_1 + p_2 \\ 3 & \text{si } p_1 + p_2 < X(\omega) \leq p_1 + p_2 + p_3 \\ 4 & \text{si } p_1 + p_2 + p_3 < X(\omega) \leq 1 \end{cases}$ suit la même loi que Z.
   2- Généralisation à Z une variable aléatoire telle que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$, tq pour tout k, $P(X = k) = p_k$.
   Démontrer que la variable aléatoire Y définie par : $Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leq p_0 \\ k & \text{si } \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i < X(\omega) \leq \sum\limits_{i=0}^{k} p_i \end{cases}$ suit la même loi que Z.
2. Lois à densité :
   1- Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $Y = a + (b - a)X$.
   Justifier que Y est une variable aléatoire à densité. En déterminer une densité.
   2- Soient α un réel tel que $\alpha > 0$ et $Z = \frac{-1}{\alpha} \ln(1 - X)$.
   Justifier que Z est une variable aléatoire à densité. En déterminer une densité.
   3- En déduire des programmes en Python qui permettent de réaliser une simulation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme, une loi exponentielle.

Exercice supplémentaire 10 :
Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes toutes de loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout entier $n > 0$. On note $Y_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{X_i}{i}$.

1. Justifier que Y_n est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de Y_n.
2. Montrer que la loi de aX_1 pour un réel $a > 0$ est une loi usuelle. La préciser.
3. Déterminer la loi (une densité de probabilité) de la somme de deux lois exponentielles indépendantes de paramètres distincts.
4. En déduire la loi de Z_2.
5. Montrer que pour tout entier $n > 0$, les variables Y_n et Z_n suivant la même loi.
6. En déduire une expression de l'espérance et la variance de Y_n sous la forme de sommes.

Exercice supplémentaire 11 : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

1. Justifier que X est une variable aléatoire à densité. Déterminer, alors une densité de X.
2. Montrer que la densité trouvée est une fonction paire.
3. Soit $Y = \frac{e^X + 1}{e^X + 2}$.
   (a) Montrer l'existence de l'espérance de Y, et donner sa valeur.
   (b) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité. Donner une densité de probabilité de Y.
4. Questions subsidiaire : Montrer l'existence de l'espérance de X, et donner sa valeur.