# Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Notation : Pour tout entier naturel $n$, on note $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$.

On admet le résultat suivant sur les intégrales de Wallis : $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

1. Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente.

   En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est également convergente.
2. Montrer : Pour tout réel $x, 1 + x \leq e^x$.
3. En déduire : Pour tout réel $t$ de $[0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$.
4. A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n} \sin x$, donner une relation entre $W_{2n+1}$ et $K_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$.
5. On note $L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} dt$.

   A l'aide du changement de variable $u = \arctan \frac{t}{\sqrt{n}}$, montrer : $L_n \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$.
6. Déterminer la limite de $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

   En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
7. Montrer : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$.