D'une intégrale sur un segment à une convergence en loi

Partie 1 : on considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1,\ u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$.

1. Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Soit $n \geq 1$. Exprimer $u_n + u_{n+1}$ en fonction de n.
3. Déduire des questions précédentes l'encadrement suivant : $\forall n \geq 2,\ \frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}$.
4. Déterminer un équivalent simple de u_n, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
5. Calculer u_1, puis établir une expression de u_n en fonction de n, sous la forme d'une somme.

Partie 2 : pour tout entier $n > 0$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{1}{u_n t^n (1+t)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

6. Montrer que pour tout $n > 0$, f_n est une densité de probabilité.
   Indication : vous utiliserez le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.
7. Que vaut $X_n(\Omega)$? Que vaut la fonction de répartition F_n de f_n sur $]-\infty, 1]$?

Partie 3 : dans la suite du problème, on suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que, pour tout $n \geq 1$, X_n est une variable aléatoire de densité f_n. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

8. Déterminer l'ensemble des réels y tels que $P(X_1 \leq y) \geq \frac{1}{2}$.
9. Soit $Z = \ln(X_1)$. Prouver que Z est une variable aléatoire à densité et en déterminer une.
10. Soit x un réel, $x > 1$.
    (a) Montrer : $0 \leq \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}du \leq \frac{1}{n+1}$.
    (b) Exprimer $F_n(x)$ en fonction de $n, u_n, \frac{1}{x}$ et $\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}du$.
    Indication : utiliser un changement de variable, puis effectuer une intégration par parties.
    (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.
11. Pour $x \leq 1$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.
12. En déduire l'existence d'une variable aléatoire X de fonction de répartition F, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.
    Donner la loi de probabilité de cette variable aléatoire X.

Partie 4 : Questions facultative

13. pour quelles valeurs de n, la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?
    Lorsqu'elle existe, calculer $E(X_n)$ et en donner une expression en fonction de u_n et u_{n-1}.