BCPST2-2 - Devoir maison n°14 - A rendre le mardi 4 mars 2025

3 options pour le devoir maison 14 :
Option 1 : chercher les exercices 1 et 2 SANS les questions facultatives.
Option 2 : chercher les exercices 1 et 2 AVEC les questions facultatives.
Option 3 : travailler les parties 1 et 2 du sujet ENS 2023.

Exercices 1 et 2 : autour de somme de variables aléatoires

Exercice 1 : variables aléatoires à densité
Rappel : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g, alors $X+Y$ est une variable à densité, dont la densité h est donnée par le produit de convolution :
$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy$.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $x^2 - y > 0$.
   indication : commencer par étudier le nombre de valeurs propres de A, puis faire une disjonction de cas sur $x^2 - y$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On note F_X et F_Y leur fonction de répartition respective.
   (a) Ecrire une fonction Python qui calcule une valeur approchée de $P(X^2 - Y > 0)$.
   On rappelle qu'en Python la fonction `random()` de la bibliothèque `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.
   (b) Montrer que X^2 et $-Y$ sont deux variables à densité. Déterminer une densité de chacune des variables.
   (c) Justifier que X^2 et Y sont indépendantes.
   (d) Question facultative : En déduire que la variable $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par
   $$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leq z \leq 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
3. En admettant la question précédente, déterminer la probabilité que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 2 : variables aléatoires discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et suivant la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0,1[$.

1. On considère pour tout événement élémentaire ω, la matrice $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$
   Déterminer la probabilité que la matrice $A(\omega)$ soit inversible.
2. Calculer, pour tout entier naturel n, $P(X > n)$ puis déterminer $P(Y > X)$.
3. Déterminer la loi de probabilité de $S = X + Y$.
4. Question facultative : déterminer la loi de probabilité de $Z = X - Y$.
   Indication : pour un entier naturel n, décomposer l'événement $(X - Y = n)$ comme une union d'événements.