BCPST2-2 - Devoir maison n°16 - A rendre le mardi 18 mars 2025 (énoncé mise à jour le 13/03/25)

Envois de messages - couples de variables aléatoires discrètes

L'objet du problème est l'étude d'un procédé d'envois de messages par internet. Lorsqu'un message est envoyé, on sait au bout d'une seconde si l'envoi a été transmis ou s'il a été rejeté par le serveur. On suppose que la probabilité qu'un message envoyé donné est transmis est constante égale à $p$, $p \in ]0,1[$. On notera $q = 1 - p$.

On veut envoyer $N$ messages où $N$ est un entier supérieur ou égal à 1. Pour chacun d'entre eux, on effectue un envoi. Chaque seconde, si l'envoi est rejeté, on recommence jusqu'à ce que le message soit réellement transmis. On suppose que toutes ces expériences sont mutuellement indépendantes.

1. On s'occupe simultanément des $N$ messages, qui sont numérotés de 1 à $N$. On désigne par $X_i$ la variable aléatoire égale au nombre de tentatives nécessaires à la transmission du message $i$, $1 \leq i \leq N$, et par $X$ le nombre total d'envois nécessaires pour que les $N$ messages soient réellement transmis. Les variables aléatoires $X_i$ sont indépendantes.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire $X_i$ pour $1 \leq i \leq N$ ?
   (b) Exprimer $X$ en fonction des $X_i$, $1 \leq i \leq N$.
   (c) Calculer l'espérance de $X$.
2. Loi de probabilité de $X$ :
   On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n \geq 1}$, telle que pour tout $n \geq 1$, $Y_n$ suit une loi géométrique de paramètre $p$, $p \in ]0,1[$. Pour $n \geq 1$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de $S_2$.
   (b) Soit $n \geq 1$, fixé. Montrer par récurrence sur $k$, que pour tout $k \geq n+1$, $\sum\limits_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}$.
   (c) Démontrer par récurrence sur $n$, $n \geq 2$, que la variable aléatoire $S_n$ a pour loi de probabilité :
   $\forall k \geq n$, $P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$
   (d) En déduire la loi de $X$.