Exercice 1 : On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on effectue des tirages successifs SANS remise. On dit qu'il y a coïncidence lorsqu'on obtient la boule numéro k au tirage k. On note Y_k la variable aléatoire valant 1 lorsqu'il y a coïncidence au $k^{\text{ième}}$ tirage et 0 sinon. On note S la variable aléatoire comptant le nombre de coïncidence.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y_k, pour k compris entre 1 et n.
   Vous pourrez commencer avec $k = 1$, puis $k = 2$.
2. Donner l'espérance et la variance de Y_k pour tout k de 1 à n.
3. Déterminer l'espérance de S.
4. Pour $i \neq j$: déterminer la loi de Y_iY_j, puis calculer $\text{Cov}(Y_i, Y_j)$.
   Les variables Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?
5. Calcuer $\text{Var}(S)$.

Exercice 2 : Soit une forêt contenant des champignons, uniquement de variétés bolets ou morilles.
Un mycologue part en ramasser. La probabilité que le champignon cueilli soit un bolet est p, $0 < p < 1$ et la probabilité que ce soit une morille est $1 - p$.
Soit N le nombre de champignons cueillis, N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On note X le nombre de bolets cueillis et Y le nombre de morilles cueillies.

1. Quelles sont les lois de probabilité associées au couple (N, X) que l'on peut déduire directement de l'énoncé ?
   En déduire la loi de X.
2. Montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.
3. Après avoir déterminé une relation entre X, Y et N, déterminer $\text{cov}(N, X)$.

Exercice 3 : Soit $p \in]0, 1[$, et soit un couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad P\left((X = n) \cap (Y = k)\right) = \begin{cases} p^2(1-p)^k \text{ si } k \geq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
2. Reconnaître la loi de probabilité de $T = X + 1$. En déduire $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de probabilité de $Z = Y - X$, et montrer que X et Z suivent la même loi.
5. Montrer que X et $Z = Y - X$ sont indépendantes. En déduire $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 4 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune la même loi géométrique de paramètre p, $p \in]0, 1[$.

1. Calculer, pour tout entier n, $P(X > n)$.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $(X = Y)$, puis celle de $(X > Y)$.
3. Déterminer la loi de probabilité de $S = X + Y$.
4. Déterminer la loi de probabilité de $U = min(X, Y)$.

Exercice 5 : Une variable aléatoire N donne le nombre de personnes se présentant à un guichet au cours d'une journée. N suit une loi de poisson de paramètre λ. Lorsque $N = k$, $k + 1$ tickets numérotés de 1 à $k + 1$ sont alors mis dans un sac, et on pioche un ticket au hasard. X donne le numéro du ticket tiré.

1. Préciser $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi conditionnelle sachant $(N = k)$ de la variable aléatoire X.
3. Calculer $P(X = 2)$.

Exercice 6 : On considère 10 hôtels, dans lesquels on répartit N touristes au hasard. N suit une loi de poisson de paramètre λ. X donne le nombre de touristes placés dans l'hôtel 1.

1. Préciser $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi conditionnelle sachant $(N = k)$ de la variable aléatoire X.
3. Déterminer la loi de probabilité de X.
4. Soit Z la variable aléatoire donnant le nombre d'hôtels vides. Calculer l'espérance de Z.
   Indication : faire intervenir des variables de Bernoulli...

Exercice 7 :
On considère q médecins et N patients. (N et q deux entiers naturels non nuls)
Chaque patient choisit un médecin au hasard, indépendamment des autres patients.
On définit différentes variables aléatoires :
$\forall i$ de 1 à q : X_i la variable aléatoire égale au nombre de patients choisissant le médecin numéro i.
$\forall i$ de 1 à q : Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le médecin i n'est choisi par personne, et 0 sinon.
Y la variable aléatoire comptant le nombre de médecins sans patients.

1. Soit i un entier compris entre 1 et q. Déterminer la loi de la variable X_i , puis son espérance et sa variance.
2. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et q, tels que $i \neq j$. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
   Que représente la variable $X_i + X_j$?
   Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$, puis sa variance. En déduire cov(X_i, X_j).
3. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et q. Donner la loi de la variable Y_i, puis celle de Y_iY_j, en distinguant les cas où $i = j$ et $i \neq j$.
4. Exprimer la variable Y en en fonction des $(Y_i)_i$. En déduire E(Y).
5. Préciser Y(Ω) et P(Y=$q-1$).
6. Calculer var(Y) en fonction de q et de N.
   On admettra la formule suivante : $Var(\sum_{i=1}^{q} Y_i) = \sum_{i=1}^{q} Var(Y_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq q} cov(Y_i, Y_j)$.
7. On suppose que N vaut qa avec a un réel fixé.
   Donner la limite de E(Y/q) et var(Y/q) lorsque q tend vers $+\infty$.

Exercice supplémentaire 8 : On considère N urnes $U_0, U_1, ...U_{N-1}$ contenant chacune N jetons. L'urne U_i contient i jetons blancs et $N-i$ jetons Noirs. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{0, 1..., N-1\}$. Lorsque $(X = k)$ on effectue des tirages successifs avec remise dans l'urne U_k, jusqu'à obtenir un jeton noir. Y est la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués.

1. Préciser $Y(\Omega)$.
2. Déterminer la loi conditionnelle sachant $(X = k)$ de la variable aléatoire Y.
3. Pour $j \geq 1$, exprimer $P(Y = j)$ sous la forme d'une somme.
4. Déterminer la limite de $P(Y = j)$ lorsque N tend vers $+\infty$, en fonction de j.

Exercice supplémentaire 9 : Soit X, Y un couple de variables aléatoires indépendantes défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et Y suit une loi géométrique de paramètre $p (p \in]0, 1[)$.
On considère pour tout événement élémentaire ω, la matrice $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega)-1 \\ Y(\omega)-1 & X(\omega) \end{pmatrix}$
Déterminer la probabilité que la matrice $A(\omega)$ soit inversible.