Fiche d'exercices n°14 : Géométrie euclidienne ˜ mars 2025

Exercice 1 : Des égalités et inégalités : Vrai-Faux
Soient $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soient α, β des réels.

$(1)\alpha\vec{x}.\vec{y}+\beta\vec{z}.\vec{y}=(\alpha\vec{x}+\beta\vec{z}).\vec{y}$	$Vrai/Faux$
$(2)\vec{x}.\vec{y}+\vec{z}.\vec{t}=(\vec{x}+\vec{z}).(\vec{y}+\vec{t})$	$Vrai/Faux$
$(3)\vec{x}.\vec{y}=0 \Rightarrow \vec{x}=0$ ou $\vec{y}=0$	$Vrai/Faux$
$(4)\vec{x}.\vec{x}=0 \Rightarrow \vec{x}=0$	$Vrai/Faux$
$(5)\ (\forall \vec{z}\in\mathbb{R}^n, \vec{x}.\vec{z}=0 \Rightarrow \vec{x}=0)$	$Vrai/Faux$
$(6)\forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n, \lvert\lvert\vec{x}+\vec{y}\rvert\rvert=\lvert\lvert\vec{x}\rvert\rvert+\lvert\lvert\vec{y}\rvert\rvert$	$Vrai/Faux$
$(7)\forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n, <\vec{x},\vec{y}>=\frac{1}{4}(\lvert\lvert\vec{x}+\vec{y}\rvert\rvert^2-\lvert\lvert\vec{x}-\vec{y}\rvert\rvert^2)$	$Vrai/Faux$
(8) Toute famille de vecteurs orthogonaux est libre.	$Vrai/Faux$
(9)Dans un parallèlogramme ABCD, la somme des carrés des longueurs des 4 côtés est égale à la somme des carrés des longueurs des 2 diagonales.	$Vrai/Faux$

Exercice 2 : Des inégalités entre réels.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soient $a_1, a_2 ..., a_n$ n réels strictement positifs et tels que $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$.
   A l'aide de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ bien choisis, montrer : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq n^2$.
3. Soit $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:
   A l'aide de vecteurs bien choisis, montrer : $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$.

Exercice 3 : Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. Dans $\mathbb{R}^4$: Soit $F = Vect(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ avec $\vec{v_1} = (1, 1, 0, 1)$ et $\vec{v_2} = (0, 1, -1, 0)$.
   Déterminer une base de $F^\perp$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$. Soit $F = Vect(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ avec $\vec{v_1} = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{v_2} = (0, 1, -1, 0)$ et $\vec{v_3} = (0, 0, 1, 0)$.
   Déterminer une base de $F^\perp$.

Exercice 4 : Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que 1 est valeur propre de h et déterminer le sous-espace propre $E_1(h)$ associé ; on vérifiera qu'il est de dimension un. Trouver un vecteur $\vec{u_1}$ appartenant à $E_1(h)$ et de norme 1.
2. On admet que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash x + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Justifier que $F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3,$ tels que $\vec{x}$ est orthogonal à tout vecteur de $E_1(h)\}$.
3. Après avoir calculé ${}^tHH$, montrer que F est stable par h,
   c'est-à-dire que pour tout vecteur $\vec{u}$ de F, $h(\vec{u})$ appartient à F
4. Trouver deux vecteurs $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ tels que $\mathscr{B}_F = (\vec{u_2}, \vec{u_3})$ soit une base orthonormée de F.
5. Montrer que $\mathscr{B}' = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$
6. Déterminer la matrice de h dans $\mathscr{B}'$
7. Déterminer la matrice A' de la projection orthogonale p_F sur F dans la base $\mathscr{B}'$
8. Les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ h et p_F commutent-ils ?
9. Exprimer la matrice A de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ en fonction de A' et d'une matrice P que l'on précisera et dont on explicitera les coefficients. Donner A

Exercice 5 : Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x + y - z - t = 0$ et $x + y + 2z + 2t = 0\}$. Soit $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$.
Déterminer le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur F puis calculer la distance du vecteur $\vec{u}$ à F.

Exercice 6 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique M=$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

1. Déterminer ker$f$, en donner une base, puis démontrer : $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $f(\vec{u}) - \vec{u} \in$ker$f$.
2. Déterminer Imf et justifier que Imf est un plan P dont on donnera une équation cartésienne et un vecteur normal.
3. En déduire que f est la projection orthogonale sur le plan P.

Exercice 7 : Eléments propres d'une projection orthogonale.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et p_F la projection orthogonale sur F.

1. Justifier que $\mathrm{Sp}(p_F) \subset \{0,1\}$.
2. Que représente chacun des sous-espaces propres pour p_F ?
3. Que dire sur F pour distinguer les cas où $\mathrm{Sp}(p_F) = \{0,1\}$, $\mathrm{Sp}(p_F) = \{1\}$ et $\mathrm{Sp}(p_F) = \{0\}$?
4. Justifier que dans tous les cas p_F est diagonalisable.
   Donner une matrice diagonale représentant p_F dans une base de vecteurs propres.

Exercice 8 : soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient n_geq2, et $(X_1, ..., X_n)$ n variables aléatoires réelles définies sur Ω. On définit la matrice de covariance associée à ces n variables aléatoires de la façon suivante : M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout i,j de $[\![1,n]\!]$, $M_{i,j}$ =cov(X_i, X_j).
Justifier que la matrice M est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.

Exercice 9 : Dans chacun des cas, déterminer une matrice P carrée telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Cas 1 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Cas 2 : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 10 : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A, et soit f^* l'endomorphisme canoniquement associé à A^T.
On dit qu'un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ lorsque pour tout $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$, $< \vec{x}, h(\vec{x}) > \geq 0$.

1. (a) Démontrer que pour tout $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$, $< \vec{x}, f(\vec{x}) > = < \vec{x}, f^*(\vec{x}) >$.
   (b) en déduire que f vérifie $\mathcal{P}$ si et seulement si $f + f^*$ vérifie $\mathcal{P}$.
   (c) Justifier qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^T = Q^{-1}$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A + A^T = QDQ^{-1}$.
   (d) En déduire que f vérifie $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(f + f^*) \subset \mathbb{R}^+$.
2. Dans la suite de l'exercice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.
   (a) Démontrer que f vérifie $\mathcal{P}$ si et seulement si g vérifie $\mathcal{P}$.
   (b) Justifier que g n'est pas diagonalisable.
   (c) Calculer $\mathrm{rg}(A - I_n)$ et en déduire que les valeurs propres de A sont 1 et $n+1$.
   Que peut-on en conclure pour f ?
3. Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre 1.
   (a) Démontrer que la matrice A vérifie pour tout i et j de $[\![1,n]\!]$, $A_{i,j} = E(X_iX_j)$.
   (b) Démontrer par récurrence sur n ($n \in \mathbb{N}^*$), que : $\forall \vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, $< \vec{x}, f(\vec{x}) > E\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_iX_i\right)^2\right)$.
   (c) retrouver que f vérifie $\mathcal{P}$.

Exercice 11 : On considère la fonction f qui à tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$,
associe le réel $f(x,y) = (x+y-1)^2 + (2x-3)^2 + (y+2x+1)^2 + (y-4)^2$.
(1) Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^4$ et 2 vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u}_2$,
tels que pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = ||x\vec{u_1} + y\vec{u_2} - \vec{v}||^2$.
(2) En introduisant une projection orthogonale, montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$, pour un unique couple (x,y) que l'on déterminera.
(3) Autre méthode : Après avoir justifié que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, montrer que f admet un unique point critique, le déterminer.

On peut vérifier : $\forall x, y : f(x,y) = \left(3x + y - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}y - \frac{7}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{43}{2}$. Conclusion.