

Semaine du lundi 24 mars au vendredi 28 mars 2025
Semaine 20

Attention ! Report des colles du lundi 24 mars au lundi 31 mars.

Géométrie dans \mathbb{R}^n

1. Produit scalaire dans \mathbb{R}^n

- Produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n , écriture matricielle.
- Vecteurs orthogonaux, matrices colonnes orthogonales.
- L'orthogonalité d'une famille de vecteurs non nuls entraîne sa liberté.
- Norme euclidienne : propriétés
- Théorème de Pythagore.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.
Dans un énoncé, l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sera indiquée.
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

- Bases orthonormales de l'espace \mathbb{R}^n ou d'un sous-espace de \mathbb{R}^n .
- Matrice de passage de la base canonique à une base orthonormale.
Attention pour les colleurs : Les algorithmes d'orthonormalisation ne sont pas au programme.

2. Projection orthogonale sur un sous-espace F de \mathbb{R}^n :

- Définition et propriété de F^\perp .
- Existence et unicité du projeté orthogonal d'un vecteur \vec{x} de \mathbb{R}^n sur un sous-espace F de \mathbb{R}^n .
- Propriétés de l'application projection orthogonale sur F : endomorphisme, $p_F \circ p_F = p_F$,
 $Im(p_F) = F = \{\text{Vecteurs invariants par } p_F\}$, $Ker(p_F) = F^\perp$, etc...
- Caractérisation de la projection orthogonale sur F par les 3 propriétés :
 $p \circ p = p$, $Im(p) = F$, $Ker(p) = F^\perp$.

3. Matrice symétrique réelle :

- Une matrice symétrique réelle n'admet que des valeurs propres réelles.
- Deux vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.
- Théorème spectral, deux versions :
 - Version 1 : Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable, traduction avec une relation matricielle.
 - Version 2 : Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres, traduction avec une relation matricielle.

Questions de cours :

1. Pour deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} de \mathbb{R}^n : Que dire de $||\vec{x} + \vec{y}||^2$? de $||\vec{x} + \vec{y}||$?
2. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donner le cas d'égalité.
3. Énoncer l'inégalité l'inégalité triangulaire, donner le cas d'égalité.
4. Donner la définition de la projection orthogonale p_F sur un sous-espace F de \mathbb{R}^n , et énoncer des propriétés.
5. Définition et propriétés d'une matrice symétrique réelle.