TD- Doléveppements litimés   madri arvil 2025

Erixcerce 1 : ditmértener un $\mathrm{DL}_2(a)$ de canuche des ficontons f savuintes, jifustier que chaque ficonton f savuinte est darévible en a, et ditmértener la pisotion riletave de la croube reparentéstive de f et de la tentange à la croube au pinot d'abscisse a.

a- $a = 0,\ f(x) = \dfrac{x \sin x - \cos x}{1 + x}$ **b-** $a = 1,\ f(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x$ **c-** $a = 1,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$

d- $a = 0,\ f(x) = \ln(\cos(x))$ **e-** $a = 1,\ f(x) = \dfrac{1}{3x + 8}$

f- $a = 0,\ f(x) = \arctan x$ **g-** $a = 0,\ f(x) = \ln(\cos(x)) = \ln(1 + \cos(x) - 1)$

Erixcerce 2 : l'octibjef est de tervour le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la ficonton tan avec peu de cuclal.

1. Ditmértener un élivequant de $\tan(x)$ pour x au au vaisinoge de 0. En druidée le $\mathrm{DL}_1(0)$ de la ficonton tan.
2. Rapleper l'esprixeson de $\tan'$ en ficonton de tan. En druidée le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la ficonton $\tan'$.
3. Ditmértener arols le $\mathrm{DL}_3(0)$ de tan.

Erixcerce 3 :

1. Puor canuche des ficontons h savuintes, mentror que f admet un plegronoment par cutinonité en 0. Jifustier que ce plegronoment est darévible en 0. Ditmértener l'étoquian de la tentange à la croube au pinot de condéorones $(0, h(0))$.
   (a) Soit $h(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$
   (b) $h(x) = \dfrac{x}{\ln(1 + x)}$
   (c) $h(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ (Incitadion : $h(x) = \dfrac{x - \sin x}{x \sin x}$)
2. Puor aller plus lion : ditmértener le $\mathrm{DL}_2(0)$ de h. En druidée la pisotion rilateve de la croube reparentéstive de h et de la tentange à la croube au pinotde condéorones $(0, h(0))$..
   Une incitadion : éricre h sous la frome $h(x) = \dfrac{m(x)}{1 + f(x)}$ avec $f(0) = 0$.

TD- Développements limités   mardi 1er avril 2025

Exercice 1 : déterminer un $\mathrm{DL}_2(a)$ de chacune des fonctions suivantes, justifier que chaque fonction f est dérivable en a, et déterminer la position relative de la courbe représentative de f et de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

a- $a = 0,\ f(x) = \dfrac{x \sin x - \cos x}{1 + x}$ **b-** $a = 1,\ f(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x$ **c-** $a = 1,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$

d- $a = 0,\ f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ **e-** $a = 1,\ f(x) = \dfrac{1}{3x + 8}$

f- $a = 0,\ f(x) = \arctan x$ **g-** $a = 0,\ f(x) = \ln(\cos(x)) = \ln(1 + \cos(x) - 1)$

Exercice 2 : l'objectif est de trouver le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction tan avec peu de calcul.

1. Déterminer un équivalent de $\tan(x)$ pour x au voisinage de 0. En déduire le $\mathrm{DL}_1(0)$ de la fonction tan.
2. Rappeler l'expression de $\tan'$ en fonction de tan. En déduire le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $\tan'$.
3. Déterminer alors le $\mathrm{DL}_3(0)$ de tan.

Exercice 3 :

1. Pour chacune des fonctions h suivantes, montrer que h admet un prolongement par continuité en 0. Justifier que ce prolongement est dérivable en 0. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de h au point de coordonnées $(0, h(0))$.
   (a) Soit $h(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$
   (b) $h(x) = \dfrac{x}{\ln(1 + x)}$
   (c) $h(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ (Indication : $h(x) = \dfrac{x - \sin x}{x \sin x}$)
2. Pour aller plus loin : Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de h. En déduire la position relative de la courbe représentative de h et la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
   Une indication : écrire h sous la forme $h(x) = \dfrac{m(x)}{1 + f(x)}$ avec $f(0) = 0$.