Semaine du lundi 3 novembre au vendredi 7 novembre 2025
Semaine 6

Variables aléatoires discrètes : $\mathbf{X(\Omega)}$ fini ou infini dénombrable

- Système complet d'événements de Ω associé à une variable aléatoire discrète.
- Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.
- Fonction de répartition.
- 6 variables aléatoires discrètes usuelles à connaître : certaine, uniforme sur $\{x_1, x_2..., x_n\}$, de Bernoulli, binomiale, de Poisson, géométrique sur $\mathbb{N}^*$.
- Espérance d'une variable aléatoire discrète : Définition, propriétés.
- Théorème de transfert.
- Variance : définitions et propriétés. Variances des lois usuelles. (Sauf loi uniforme)
- Inégalité de Markov, inégalité de Bienaimé-Tchebychev.

Remarque : La loi hypergéométrique n'est pas au programme de BCPST.

Polynômes

- Degré, coefficient dominant
- Opérations : somme, produit, composée
- Racine d'un polynôme, caractérisation
- Racine multiple, caractérisation
- Ordre de multiplicité d'une racine, définition.
  Attention la caractérisation par les dérivées successives est hors-programme
- Relation coefficients-racines pour les polynômes de degré 2

Questions de cours ou petit exercice.

1. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale : énoncé et démonstration.
2. La loi géométrique est une loi sans mémoire : énoncé et démonstration.
3. Citer sans démonstration le théorème de transfert. Puis exercice à détailler :
   Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$. Justifier que $Y = X^2$ admet une espérance et la calculer.
4. Inégalité de Bienaimé-Tchebychev : énoncé, schéma et démonstration (Démonstration à partir de l'inégalité de Markov, qu'on ne redémontre pas ici)..
5. soit $P(X) = X^4 + X^3 - 2X^2 - 3X + 3$. Justifier que 1 est racine multiple du polynôme P.
   Puis factoriser P en produits de polynômes du 1er degré de $\mathbb{C}[X]$.
6. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$: $\begin{cases} x + y = \sqrt{2} \\ xy = 2 \end{cases}$.
   Donner l'écriture algébrique, le module et un argument des solutions.