

Semaine du lundi 24 novembre au vendredi 28 novembre 2025
Semaine 9

Algèbre : Espaces vectoriels

- Structure d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Règles de calcul. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
- Sous-espaces vectoriels. Intersection de deux sous-espaces vectoriels.
- Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.
- Famille finie de vecteurs : génératrice, libre, liée, base.
- Une famille finie de polynômes non nuls de degrés distincts deux à deux est libre.
- Espaces vectoriels de dimension finie.
- Propriétés des familles de vecteurs en dimension finie : caractérisation d'une base dans un espace vectoriel de dimension finie par son cardinal et son caractère générateur ou libre.
- Rang d'une famille finie de vecteurs : définition, méthode de calcul.

Applications linéaires

- Définition. Noyau, image, propriétés.
- Caractérisation de f injective, f surjective, f bijective, f inversible.
- Opérations sur les applications linéaires ($+$, $\cdot$, $\circ$, application réciproque), propriétés.

Questions de cours : énoncé et démonstration :

1. Si la famille $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est liée, alors au moins un des vecteurs de la famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres.
2. Si un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire d'une famille libre, alors cette écriture est unique.
3. Toutes les bases d'un même espace vectoriel de dimension finie non nulle sont de même cardinal.
4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n non nulle et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E :
Si $\text{card}(\mathcal{F})=n$ et $\mathcal{F}$ est une famille libre alors $\mathcal{F}$ est une base de E .
5. Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ une famille de p vecteurs de E .
 $\text{rg}(X_1, X_2, \dots, X_p) = p \Leftrightarrow (X_1, X_2, \dots, X_p)$ est une famille libre.
6. Soit f une application linéaire de E dans F : f est injective si et seulement si $\ker f = \{O_E\}$.