

Semaine du lundi 12 janvier 2026 au vendredi 16 janvier 2026  
Semaine 13

Format des colles : on reste sur le format classique, le trinôme ensemble en 1 heure

**Valeur propre - Sous-espace propre pour un endomorphisme ou une matrice carrée**

- Définitions d'une valeur propre, du spectre, d'un vecteur propre, d'un sous-espace propre.
- Caractérisation d'une valeur propre à l'aide du rang.
- Dimension d'un sous-espace propre par le théorème du rang.
- Valeurs propres d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.
- Propriétés pour la matrice transposée.
- Cas particulier des matrices  $2 \times 2$ .
- Propriété : Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres.

**Propriétés de famille finie de vecteurs propres**

- Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Toute famille finie de vecteurs obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- $\dim E = n$ . Un endomorphisme de  $E$  (ou une matrice  $n \times n$ ) admet au plus  $n$  valeurs propres distinctes.
- $\dim E = n$ . La somme des dimensions des sous-espaces propres d'un endomorphisme de  $E$  (ou d'une matrice  $n \times n$ ) est inférieure ou égale à  $n$ .

**Endomorphismes et matrices diagonalisables**

- Définitions.
- Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
- Condition suffisante de diagonalisation :  $\dim E = n$ . Un endomorphisme de  $E$  possédant  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable, et chaque sous-espace propre est de dimension 1.
- Condition suffisante de diagonalisation, théorème spectral : Toute matrice symétrique réelle  $M$  est diagonalisable et il existe  $P$  et  $D$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $P$  est inversible,  $D$  est diagonale et  $M = PDP^{-1}$ .

*Questions de cours : énoncé et démonstration*

1. Formule de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme.
2. Nombre maximal de valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie ou d'une matrice carrée.
3.  $\dim E = n$ . Propriété de la somme des dimensions des sous-espaces propres d'un endomorphisme de  $E$ .
4.  $\dim E = n$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $f$  est diagonalisable alors la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $f$  est égale à  $n$ .
5.  $\dim E = n$ . Un endomorphisme de  $E$  possédant  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable, et chaque sous-espace propre est de dimension 1