

Semaine du lundi 16 mars au vendredi 20 mars 2026
Semaine 19

Géométrie dans $\mathbb{R}^n$

1. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

- Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$, écriture matricielle.
- Vecteurs orthogonaux, matrices colonnes orthogonales.
- L'orthogonalité d'une famille de vecteurs non nuls entraîne sa liberté.
- Norme euclidienne : définition et premières propriétés
- Bases orthonormales de l'espace $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
- Matrice de passage de la base canonique à une base orthonormale.
Attention pour les colleurs : Les algorithmes d'orthonormalisation ne sont pas au programme.

2. Projection orthogonale sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$:

- Définition et propriété de $F^\perp$.
- Existence et unicité du projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$.
- Propriétés de l'application projection orthogonale sur F : endomorphisme, $p_F \circ p_F = p_F$, $Im(p_F) = F = \{\text{Vecteurs invariants par } p_F\}$, $Ker(p_F) = F^\perp$, etc...
- Caractérisation de la projection orthogonale sur F par les 3 propriétés :
 $p \circ p = p$, $Im(p) = F$, $Ker(p) = F^\perp$.

Remarques pour cette semaine :

- pas de théorème de Pythagore, pas d'inégalité de Cauchy-Schwarz, pas d'inégalité triangulaire.
- Rien sur les matrices symétriques à coefficients réels.

Questions de cours :

1. Expression des coordonnées dans la base canonique d'un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$, en fonction des produits scalaires.
2. Propriété de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. (savoir le redémontrer)
3. Donner la définition de la projection orthogonale p_F sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$, et énoncer des propriétés.
4. Donner 3 façons de caractériser le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{x}$ sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$.