

Semaine du lundi 23 mars au vendredi 27 mars 2026
Semaine 20

Géométrie dans $\mathbb{R}^n$

1. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

- Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$, écriture matricielle.
- Vecteurs orthogonaux, matrices colonnes orthogonales.
- L'orthogonalité d'une famille de vecteurs non nuls entraîne sa liberté.
- Norme euclidienne : définition et premières propriétés
- Théorème de Pythagore.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.
Dans un énoncé, l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sera indiquée.
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité.
- Bases orthonormales de l'espace $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
- Matrice de passage de la base canonique à une base orthonormale.
Attention pour les colleurs : Les algorithmes d'orthonormalisation ne sont pas au programme.

2. Projection orthogonale sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$:

- Définition et propriété de $F^\perp$.
- Existence et unicité du projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$.
- Propriétés de l'application projection orthogonale sur F : endomorphisme, $p_F \circ p_F = p_F$, $Im(p_F) = F = \{\text{Vecteurs invariants par } p_F\}$, $Ker(p_F) = F^\perp$, etc...
- Caractérisation de la projection orthogonale sur F par les 3 propriétés :
 $p \circ p = p$, $Im(p) = F$, $Ker(p) = F^\perp$.

3. Matrice symétrique réelle :

- Une matrice symétrique réelle n'admet que des valeurs propres réelles.
- Deux vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.
- Théorème spectral, deux versions :
 - Version 1 : Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable, traduction avec une relation matricielle.
 - Version 2 : Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres, traduction avec une relation matricielle.

Questions de cours :

1. Expression des coordonnées dans la base canonique d'un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$, en fonction des produits scalaires.
2. Propriété de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. (savoir le redémontrer)
3. Donner la définition de la projection orthogonale p_F sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$, et énoncer des propriétés.
4. Donner 3 façons de caractériser le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{x}$ sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$.
5. Pour deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$: Que dire de $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2$? de $\|\vec{x} + \vec{y}\|$?
6. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donner le cas d'égalité.
7. Énoncer l'inégalité triangulaire, donner le cas d'égalité.
8. Définition et propriétés d'une matrice symétrique réelle.