

Détecteur surveillé n°1 (corrigé)[PHYSIQUE]Problème n°1 : acquisition d'un signal de RMN

- 1) Gain $|H| = \frac{U_{sm}}{U_{em}}$ (rapport des amplitudes du signal de sortie et du signal d'entrée.)

$$|H| = \frac{|H_0| = H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

- 2) $\omega \rightarrow 0 \quad |H| \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow +\infty \quad |H| \rightarrow 0$
 Filtre passe bande

- 3) gain $|H|$ maximal si dénominateur minimal car H_0 cte
 $\Rightarrow \frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0} \Rightarrow \boxed{H_{max} = H_0}$

- 4) ω_{c1} et ω_{c2} vérifient $|H| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ soit

$$\frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \quad (\Leftrightarrow) \quad Q^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ 2 possibilités :

1°) $Q \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right) = +1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{Q}{\omega_c} \omega_c - \frac{Q \omega_0}{\omega_c} = 1$ soit

$$\omega_c^2 - \frac{\omega_0}{Q} \omega_c - \omega_0^2 = 0 \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2$$

Seule racine positive $\boxed{\omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}$

2°) $Q \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right) = -1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{Q}{\omega_0} \omega_c - \frac{Q \omega_0}{\omega_c} = -1$ soit

$$\omega_c^2 + \frac{\omega_0}{Q} \omega_c - \omega_0^2 = 0 \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2$$

Seule racine positive $\boxed{\omega_{c1} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}$

$$\boxed{\Delta\omega} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} - \left(-\frac{\omega_0}{2Q}\right) = \boxed{\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\omega_r}{Q}}$$

5. Si Q élevé $\Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_r}{Q}$ petit $\Rightarrow$ bande passante du filtre étroite $\Rightarrow$ filtre très sélectif car ne laisse passer qu'une bande de fréquences étroite centrée sur $\omega_r = \omega_0$

6. Si le gain est maximal pour $\omega = \omega_0$ alors la tension de sortie passe par un maximum d'amplitude pour $\omega = \omega_0$ car $U_{sm} = G(\omega_0) \times U_{em} \Rightarrow U_{sm}$ maximale. on dit qu'il y a résonance de l'amplitude de la tension de sortie.

• Ainsi le signal pour $\omega = \omega_0$ a une amplitude importante en sortie et les signaux associés à des pulsations $\neq \omega_0$ (provenant d'autres groupes de protons ou bien du "bruit") sont très atténués car hors bande passante.

7. D'après 5. il faut choisir Q élevé

8. on lit la fréquence de résonance $f_r = f_0 = 5,31 \cdot 10^8$ Hz (abscisse du maximum de gain) . on en déduit $H_{max} = 0,4$
 $\boxed{\omega_r = \omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times 5,31 \cdot 10^8 = 3,34 \cdot 10^9 \text{ rad s}^{-1}}$

* 9. D'après 4. $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \Rightarrow$ on détermine la
 Voir graph en annexe la largeur de la bande passante sur le graphe en lisant les fréquences de coupure f_{c1} et f_{c2} associées à $\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{0,4}{\sqrt{2}} = 0,283$
 on trouve $f_{c1} = 5,28 \cdot 10^8$ Hz $\Rightarrow \omega_{c1} = 2\pi f_{c1} = 3,317 \cdot 10^9 \text{ rad s}^{-1}$
 $f_{c2} = 5,34 \cdot 10^8$ Hz $\Rightarrow \omega_{c2} = 2\pi f_{c2} = 3,355 \cdot 10^9 \text{ rad s}^{-1}$

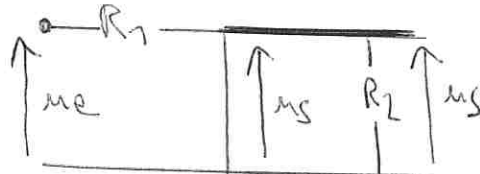
$$\Rightarrow \Delta\omega = 3,355 \cdot 10^9 - 3,317 \cdot 10^9 = \underline{3,822 \cdot 10^7 \text{ rad s}^{-1}}$$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{3,34 \cdot 10^9}{3,822 \cdot 10^7} \approx 90}$$

valeur élevée pour réaliser les conditions mentionnées à la question 7.

10 - Branches f. C(=) $\rightarrow$ $i_c = 0$ en sortie $\Rightarrow$ pas de courant dans R_2 $i_s = R_2 \cdot i = 0 \Rightarrow$ Branches f. coupées

Autres f. C(=) fil
 $\Rightarrow i_s = 0$ (R_2 est court-circuitée)



$\Rightarrow$ H-f coupées $\Rightarrow$ il s'agit bien d'un filtre passe bande.

11.

(+1) $\underline{u}' - \frac{i_2}{j\omega C} - \underline{u}_s = 0$
 avec $\underline{i}_2 = \frac{\underline{u}_s}{R_2}$
 $\Rightarrow \underline{u}' = \underline{u}_s \left(1 + \frac{1}{jR_2\omega C} \right)$

12. Maille (+) ① $\underline{u}_e - R_1 \underline{i} - \underline{u}' = 0$ avec
 la loi des nœuds en N: $\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 = j\omega C \underline{u}' + \frac{\underline{u}_s}{R_2}$
 d'où $\underline{u}_e - jR_1\omega C \underline{u}' - \frac{R_1}{R_2} \underline{u}_s - \underline{u}' = 0$

$\Rightarrow \underline{u}_e - \frac{R_1}{R_2} \underline{u}_s - (1 + jR_1\omega C) \underline{u}' = 0$

13. on reporte l'expression de $\underline{u}'$ trouvée au 11. dans la relation trouvée au 12.

$\underline{u}_e - \frac{R_1}{R_2} \underline{u}_s - (1 + jR_1\omega C) \left(1 + \frac{1}{jR_2\omega C} \right) \underline{u}_s = 0$

Soit $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + (1 + jR_1\omega C) \left(1 + \frac{1}{jR_2\omega C} \right)}$

$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1 + jR_1\omega C + \frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{jR_2\omega C}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{2R_1}{R_2} \right) + j \left(R_1\omega C - \frac{1}{R_2\omega C} \right)}$

$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 / \left(1 + \frac{2R_1}{R_2} \right)}{1 + j \frac{1}{1 + \frac{2R_1}{R_2}} \left(R_1\omega C - \frac{1}{R_2\omega C} \right)} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$

En identifiant les 2 dernières expressions de $\underline{H}$ on obtient :

$$\boxed{H_0} = \frac{1}{1 + \frac{2R_1}{R_2}} = \boxed{\frac{R_2}{2R_1 + R_2}}$$

$$(1) \frac{1}{1 + \frac{2R_1}{R_2}} R_1 C \cancel{\omega} = Q \frac{\cancel{\omega}}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1 + \frac{2R_1}{R_2}) R_2 C \cancel{\omega}} = Q \frac{\omega_0}{\cancel{\omega}} \quad (2)$$

Produit des 2 relations $\Rightarrow$ $\frac{1}{(1 + \frac{2R_1}{R_2})^2} \frac{R_1}{R_2} = Q^2$
 (1) et (2)

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{1 + \frac{2R_1}{R_2}} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{Q} = \frac{R_2}{2R_1 + R_2} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \boxed{\frac{\sqrt{R_1 R_2}}{2R_1 + R_2}}$$

Quotient des 2 relations $\Rightarrow R_1 R_2 C^2 = \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}}$
 (1) et (2)

14. $H_{\max} = H_0 = \boxed{\frac{R_2}{2R_1 + R_2}}$
 (question 3.)

15. question 8 $H_{\max} = 0,4 = \frac{R_2}{2R_1 + R_2}$ pour $\omega_0 = 3,34 \cdot 10^9 \text{ rad s}^{-1}$
 (figure 1)

$$\text{et } \omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}} = 3,34 \cdot 10^9 \Rightarrow \sqrt{R_1 R_2} = \frac{1}{3,34 \cdot 10^9 \times 10^{-12}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{R_1 R_2} = 299,4 \, \Omega \Rightarrow R_1 R_2 = 8,96 \cdot 10^4 \, \Omega^2$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{8,96 \cdot 10^4}{R_2} \quad \text{que l'on reporte dans } H_{\max} = 0,4 = \frac{R_2}{2R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{R_2}{2 \times \frac{8,96 \cdot 10^4}{R_2} + R_2} = 0,4 \Rightarrow R_2^2 (1 - 0,4) = 0,4 \times 2 \times 8,96 \cdot 10^4$$

$$\Rightarrow \boxed{R_2 = 346 \, \Omega}$$

$$R_1 = \frac{8,96 \cdot 10^4}{346} \Rightarrow$$

$$\boxed{R_1 = 259 \, \Omega}$$

$$16. \quad Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{2R_1 + R_2} = \frac{\sqrt{346 \times 259}}{2 \times 259 + 346} = 0,346 \ll 90 \text{ valeurs}$$

exigée à la question 9. Ce montage n'est pas
suffisamment sélectif pour distinguer et sélectionner
 les signaux des différents types de protons en les séparant.

$$17. \quad Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{2R_1 + R_2} = \frac{\sqrt{R_1 R_2} / R_1}{2 + \frac{R_2}{R_1}} = \frac{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{2 + \frac{R_2}{R_1}} = \frac{\sqrt{x}}{2+x}$$

en posant $x = \frac{R_2}{R_1}$. $\Rightarrow$ le tracé de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2+x}$ permet
 d'étudier l'influence du rapport $\frac{R_2}{R_1}$ sur la valeur de Q .

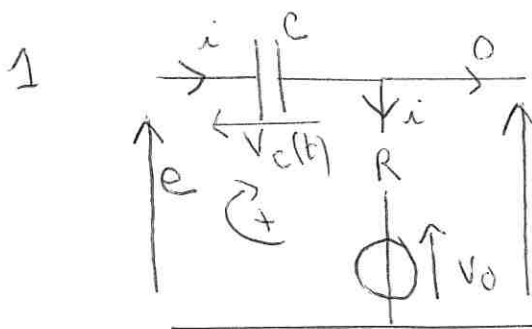
on remarque que si x est petit : $R_2 \ll R_1$ Q est faible.

si x est grand $R_2 \gg R_1$ Q est faible

et quelle que soit la valeur de ce rapport, la valeur
 maximale possible pour Q sera $0,35 \ll 90$!

$\Rightarrow$ Ce montage ne convient pas pour réaliser le filtre souhaité
 (impossible de trouver des valeurs de R_1 et R_2 adaptées)

Problème n°2 : Détecteur de véhicule.



Maille $\vec{E}$: $e(t) - V_C(t) - V(t) = 0$

dérivée $\% \text{ à } t$: $\frac{de}{dt} - \frac{dV_C(t)}{dt} - \frac{dV(t)}{dt} = 0$

avec $V(t) = R i + V_0$ et $i = C \frac{dV_C(t)}{dt}$

$\Rightarrow i = \frac{V(t) - V_0}{R} = C \frac{dV_C}{dt}$ dans (1)

$\Rightarrow \frac{de}{dt} - \frac{V(t) - V_0}{RC} - \frac{dV(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{RC} = \frac{de(t)}{dt} + \frac{V_0}{RC}}$

2 - Régime permanent $\Rightarrow C \Rightarrow \rightarrow \xrightarrow{\lambda=0} \Rightarrow r=0$ dans R

$$\Rightarrow R i(t < 0) = 0 \Rightarrow V(t < 0) = R i(t < 0) + V_0$$

$$\Rightarrow \boxed{V(t < 0) = V_0}$$

Maille $\begin{pmatrix} + \\ E \end{pmatrix} \Rightarrow e(t < 0) - V_c(t < 0) - V_0 = 0 \Rightarrow \boxed{V_c(t < 0) = E - V_0}$

3 - Continuité de la tension aux bornes de C à $t=0$

$$\boxed{V_c(t=0^+) = V_c(t=0^-) = E - V_0}$$

Maille $\begin{pmatrix} + \\ -E \end{pmatrix}$ à $t=0^+$ $e(t=0^+) - V_c(t=0^+) - V(t=0^+) = 0$

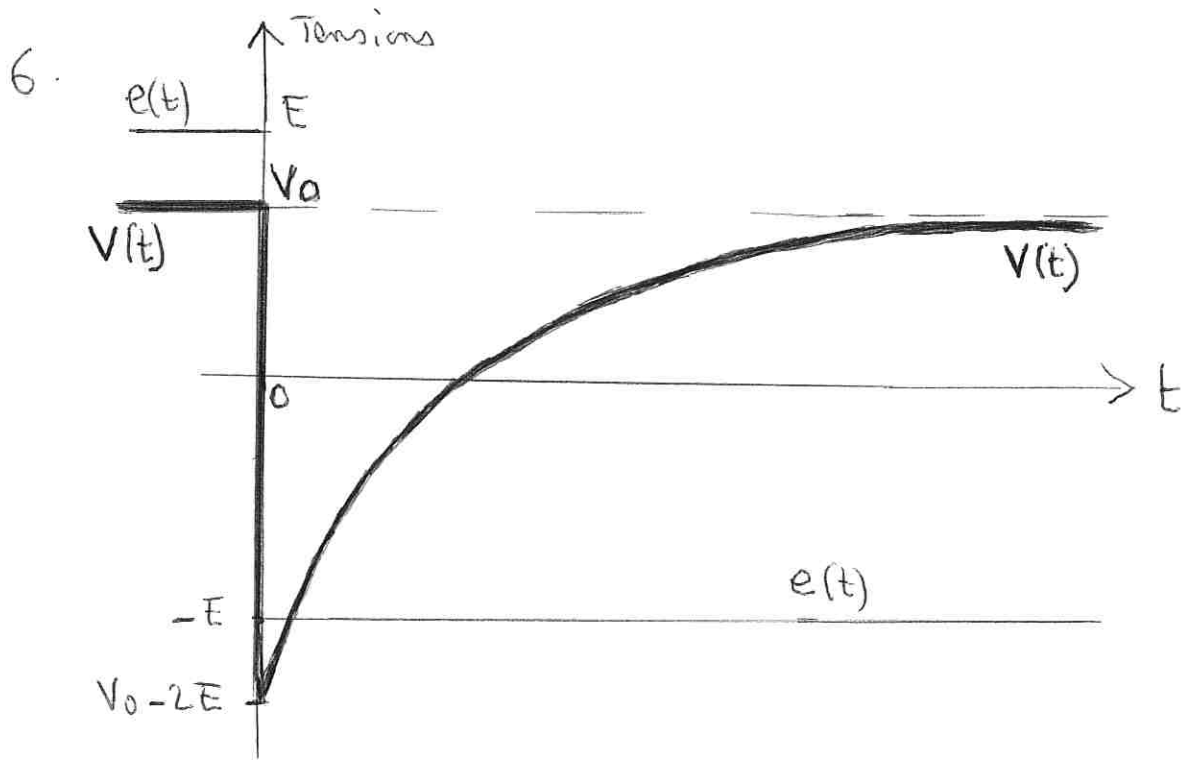
$$\Rightarrow \boxed{V(t=0^+) = V_0 - 2E} \Rightarrow \boxed{V(t=0^+) < 0} \text{ car } E > \frac{V_0}{2}$$

4 - pour $t > 0$ $e(t) = -E = cte \Rightarrow \frac{de}{dt} = 0$ dans l'équa diff. de la question 1- qui devient :

$$\boxed{\frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{RC} = \frac{V_0}{RC}}$$

5. Pour $t > 0$ $V(t) = A e^{-\frac{t}{RC}} + V_0$ avec $V(t=0^+) = V_0 - 2E$

$$\Rightarrow V_0 - 2E = A + V_0 \Rightarrow A = -2E \Rightarrow \boxed{V(t) = V_0 - 2E e^{-t/RC}}$$



Annexa question 9.

$$H_{max} = 0,40$$

$$\frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = 0,283$$

