

Devoir surveillé n°1

Physique

A propos des détecteurs de signaux.....

Problème n°1 : Acquisition d'un signal de RMN

(d'après Polytechnique/inter ENS option PSI 2017)

Dans un appareil à RMN, les protons de l'échantillon soumis à un champ magnétique intense interagissent avec une onde radiofréquence. Lors de cette interaction un signal est émis par les protons. Afin de différencier les signaux associés à chaque groupe de protons, l'unité de détection des signaux émis fait partie d'un circuit de filtrage des signaux.

On étudie la réponse de ce filtre, en régime permanent sinusoïdal, à une excitation notée $u_e(t) = E \cos(\omega t)$, ω étant une pulsation quelconque. La tension de sortie est $u_s(t)$ et la fonction de transfert complexe associée au filtre s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Avec ω_0 une valeur particulière de la pulsation ω et Q un paramètre appelé facteur de qualité du filtre. H_0 est une constante positive.

1. Quelle est la signification physique de $|\underline{H}|$? Donner son expression en fonction de la pulsation ω .
2. En étudiant rapidement les comportements limites aux basses et hautes fréquences, déterminer la nature du filtrage réalisé.
3. Quelle est la pulsation particulière ω_r , qui permet d'atteindre la valeur maximale du gain $|\underline{H}|$, notée H_{max} ? Que vaut alors H_{max} ?
4. Déterminer les pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} en fonction de ω_0 et Q . Montrer que la largeur de la bande passante du filtre définie par $\Delta\omega = |\omega_{c1} - \omega_{c2}|$ s'écrit $\frac{\omega_0}{Q}$.
5. On dit que le facteur de qualité Q caractérise la sélectivité du filtre. Justifiez cette affirmation.

On donne figure 1 le diagramme du gain $|\underline{H}| = f(\text{fréquence})$ pour le filtre de l'unité de détection.

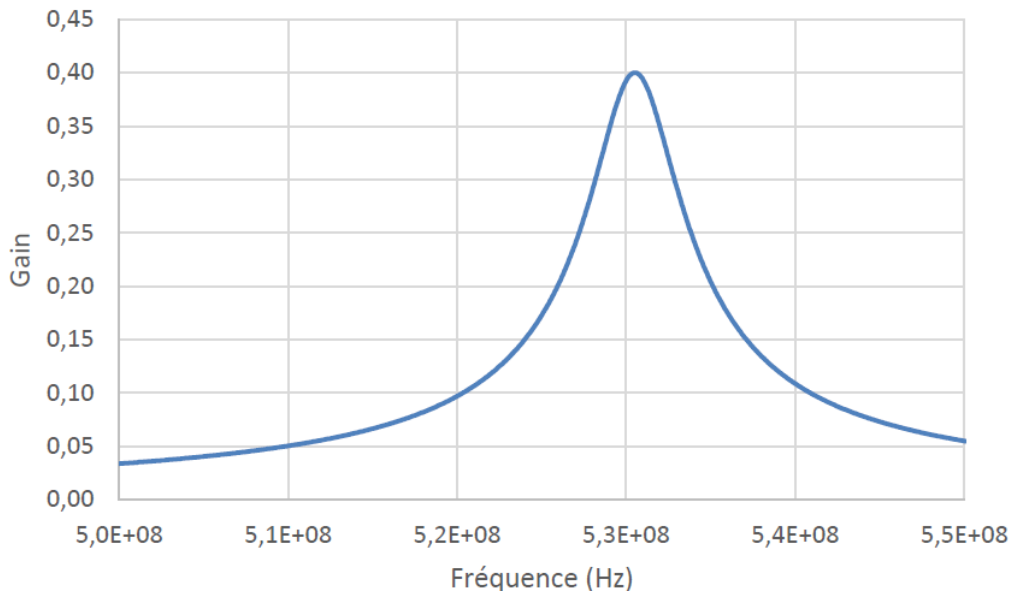


Figure 1 : Evolution du gain en fonction de la fréquence.

Le signal émis par chaque groupe de protons est transformé en une tension d'entrée $u_e(t) = E \cos(\omega_0 t)$ où ω_0 désigne une pulsation propre à chaque groupe de proton étudié, que l'on cherche à déterminer pour établir le spectre RMN. Le déplacement chimique δ porté en abscisse du spectre est ensuite calculé à partir de ω_0 par comparaison avec un type de protons choisi comme référence.

Le circuit qui joue le rôle de filtre est dit accordable à la pulsation ω_0 propre au signal du groupe de protons, ce qui signifie que l'on peut faire varier les valeurs de la caractéristique d'un des dipôles du circuit pour obtenir un maximum du gain pour $\omega = \omega_0$, afin de sélectionner préférentiellement le signal de ce groupe de protons.

6. Comment nomme-t-on le phénomène physique observé au niveau de l'amplitude de la tension de sortie $u_s(t)$ lorsque le circuit est accordé à la pulsation ω_0 , l'amplitude de la tension d'entrée étant maintenue constante ? Quelle propriété observe-t-on alors pour l'amplitude de la tension de sortie ?

Expliquer en quoi le fait de pouvoir accorder le circuit permet à la fois de différencier les signaux émis par des protons dans un environnement électronique différent et de s'affranchir d'un éventuel « bruit de fond » constitué par des signaux parasites.

7. Si l'on souhaite distinguer avec une bonne résolution des protons dont les déplacements chimiques sont très voisins, est-il préférable de choisir pour Q une valeur faible ou élevée ? Justifier.

Le diagramme du gain $|H|$ représenté sur la figure 1 est celui d'un circuit accordé afin de sélectionner un type de proton de pulsation propre ω_0 .

8. En exploitant la figure 1, déterminer la valeur de la fréquence propre puis de la pulsation propre ω_0 du signal caractéristique de ce groupe de protons. Que vaut le gain du filtre pour la pulsation ω_0 ?
9. En utilisant la figure 1 déterminer la valeur du facteur de qualité Q du filtre ainsi accordé. Expliquez votre démarche et commentez la valeur de Q trouvée.

On propose le circuit de la figure 2 pour l'utiliser en sortie aux bornes de la résistance R_2 comme filtre des signaux RMN. Les deux condensateurs sont identiques. La tension d'alimentation en entrée est sinusoïdale de pulsation ω .

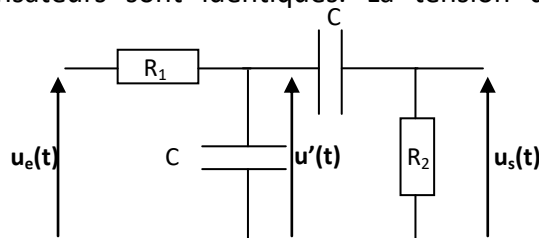


Figure 2 : Circuit utilisé en sortie aux bornes de R_2 .

- 10.** A l'aide d'une étude asymptotique pour les basses et les hautes fréquences, vérifier que ce montage appartient bien à la catégorie de filtre souhaitée.
- 11.** Exprimer en notation complexe la tension $\underline{u}'$ en fonction de $\underline{u}_s$, C , R_2 et de la pulsation ω .
- 12.** Trouver une relation entre, les tensions complexes $\underline{u}_e$, $\underline{u}'$, $\underline{u}_s$, les grandeurs caractéristiques des dipôles R_1 , R_2 , C et la pulsation ω .
- 13.** En déduire la fonction de transfert complexe du montage et montrer qu'elle s'écrit sous la forme :
- $$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$
- Avec $\omega_0 = \frac{1}{C \cdot \sqrt{R_1 \cdot R_2}}$ $Q = \frac{\sqrt{R_1 \cdot R_2}}{2R_1 + R_2}$ et $H_0 = \frac{R_2}{2R_1 + R_2}$
- 14.** Exprimer la valeur maximale H_{max} du gain du filtre en fonction de R_1 et R_2 .
- 15.** En exploitant la figure 1 déterminer les valeurs à choisir pour R_1 , R_2 afin que ce filtre soit accordé sur la valeur de la pulsation ω_0 du signal du groupe de protons décrit à la question 8. avec la même valeur du gain, sachant que la valeur de la capacité de chaque condensateur vaut $C = 1 \text{ pF}$ (10^{-12} F). Expliquez votre démarche.
- 16.** Quelle serait alors la valeur du facteur de qualité Q du montage ? Le montage proposé remplit-il toutes les conditions exigées pour le filtrage du signal du groupe de protons ? Quelles critiques peut-on formuler ?

Afin de pallier les inconvénients cités précédemment on envisage de modifier les valeurs des résistances R_1 et R_2 . La courbe de la figure 3 représentant le tracé de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2+x}$ permet d'étudier l'influence des valeurs de R_1 et R_2 sur l'aptitude du filtre à sélectionner le signal d'un groupe de protons.

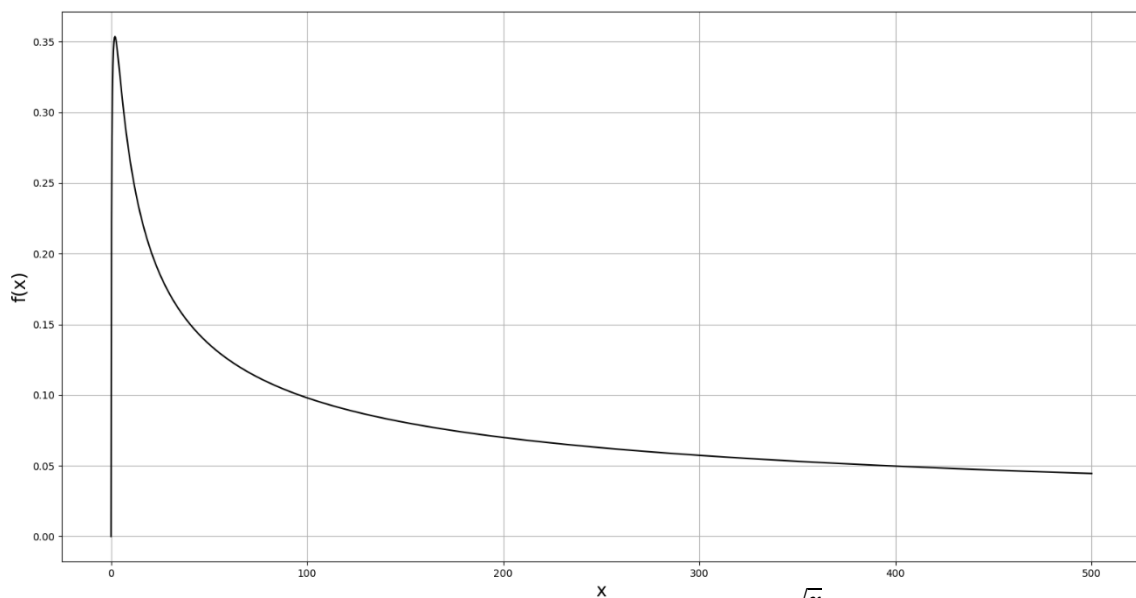


Figure 3 : Graphe de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2+x}$

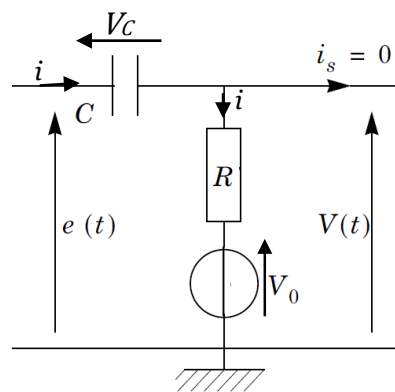
- 17.** Est-il possible de trouver des valeurs de R_1 et R_2 permettant de répondre à toutes les exigences qui permettraient l'utilisation de ce montage pour filtrer les signaux en RMN ? Justifiez votre réponse. Conclure à propos de l'utilisation de ce circuit dans l'unité de détection des signaux de l'appareil RMN.

Problème n°2 : Détecteur de véhicule (d'après Centrale option PSI 2007)

Les détecteurs de véhicules à boucle inductive enterrée sont actuellement très répandus, tant pour le contrôle des flux sur autoroutes que pour la détection automatique pour le déclenchement de feux tricolores ou de barrières de sécurité.

Ils comportent un fréquencemètre analogique qui va permettre de mesurer les variations de fréquence du signal électrique présent dans le circuit de la boucle inductive enterrée, qui est perturbé par la présence d'un véhicule passant au-dessus de celle-ci, permettant ainsi sa détection.

Le problème étudie une cellule « (R C V₀) », représentée ci-dessous, qui entre dans la constitution du fréquencemètre.



La cellule (R C V₀)

Dans la cellule V₀ symbolise une source idéale de tension continue et e(t) une source de tension variable au cours du temps, non sinusoïdale. On suppose nul le courant de sortie i_s.

1. Montrer que e(t) et V(t) sont reliés par l'équation différentielle :

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{RC} = \frac{de(t)}{dt} + \frac{V_0}{RC}$$

On s'intéresse à la réponse V(t) de la cellule à une discontinuité de tension. La cellule est en régime permanent établi pour t < 0 avec e(t) = +E ; E constante > 0. La tension e(t) passe brusquement à la valeur e(t) = -E pour t > 0. On suppose que $E > \frac{V_0}{2}$.

2. Que vaut la tension V(t < 0) pendant la durée du régime permanent pour t < 0 ? Justifier.
Montrer que la tension aux bornes du condensateur pendant cette même durée vaut V_C(t < 0) = (E - V₀).
3. Que vaut la tension V_C(t = 0⁺) aux bornes du condensateur. Que vaut la tension V(t = 0⁺) (On précisera son signe) ?
4. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par le signal de sortie V(t) pour t > 0.
5. Déterminer pour t > 0 l'expression du signal de sortie V(t) de la cellule (R, C, V₀) attaquée par cette discontinuité de tension.
6. Dessiner sur un même graphe les évolutions de e(t) et V(t).