

Devoir surveillé n°3

Physique

Problème n°1 : Sécurisation de la zone d'arrivée d'un toboggan aquatique

(d'après Concours INP – TSI 2025)

Dans tout ce qui suit, on étudie le mouvement d'un enfant modélisé par un point matériel M, de masse $m = 50 \text{ kg}$, qui glisse sur un toboggan dont le schéma est donné en **figure 1**.

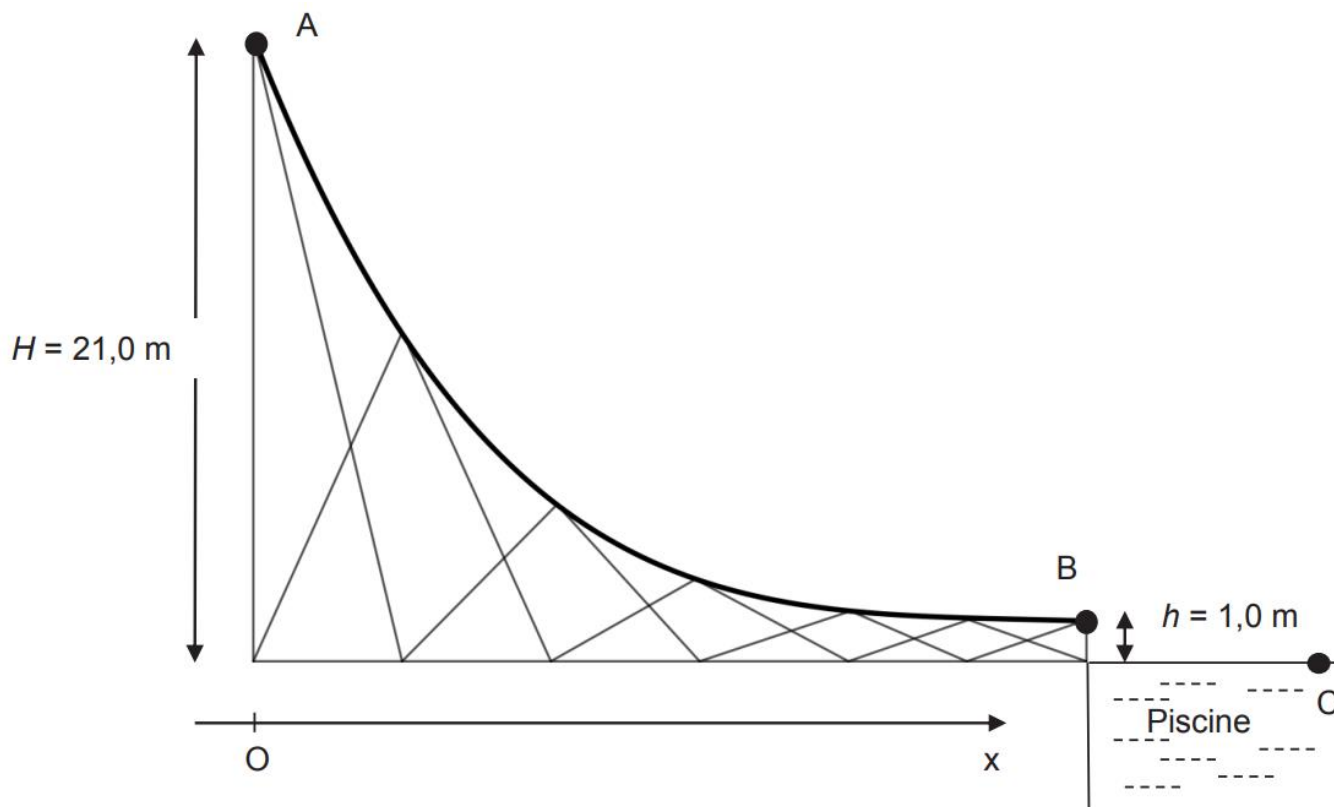


Figure 1 - Schéma d'implantation du toboggan par rapport à la piscine

L'enfant se laisse glisser sur le toboggan depuis le point A d'altitude $H = 21,0 \text{ m}$ sans vitesse initiale. Il termine sa glissade au point B d'altitude $h = 1,0 \text{ m}$ avec une vitesse horizontale qui lui permet d'atteindre un point C à la surface de l'eau de la piscine. Une discussion s'engage lors de la conception du toboggan pour savoir dans quelle zone de la piscine il faudra interdire les baigneurs pour éviter toute collision avec l'enfant qui arrive dans la piscine. Par la suite, on prendra $g = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$. On suppose tout d'abord qu'un filet d'eau annule les frottements de l'enfant sur toute la longueur $L = 37,5 \text{ m}$ de la piste du toboggan.

1. Montrer que le poids est une force conservative et retrouver l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur dans le cas où la cote z d'un point matériel est repérée sur un axe Oz ascendant.
2. Énoncer le théorème de l'énergie mécanique. En l'appliquant à l'enfant qui glisse sans frottement entre les points A et B et en déduire l'expression de la vitesse v_B atteinte au point B en fonction des données.
3. Réaliser l'application numérique.

En réalité, la valeur de la vitesse mesurée au point B vaut $v_B = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à cause de l'existence d'une force de frottement de glissement $\vec{R}_T$ exercée par la piste du toboggan sur l'enfant.

4. Déterminer l'expression puis la valeur numérique du travail de la force de frottement en appliquant à nouveau le théorème de l'énergie mécanique entre A et B.
5. Faire figurer sur un schéma, sans souci d'échelle, les forces appliquées sur le point M représentant l'enfant en un endroit quelconque de la glissade. Représenter au même point le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{l}$. Que constate-t-on quant à l'orientation des vecteurs $\vec{R}_T$ et $d\vec{l}$?
6. On suppose que la norme de $\vec{R}_T$ est constante sur le trajet. Exprimer le travail de $\vec{R}_T$ entre A et B en fonction de la norme de $\vec{R}_T$ et de la longueur L de la piste. En déduire la valeur de la norme de $\vec{R}_T$.

On s'intéresse maintenant à la localisation du point de chute C de l'enfant dans l'eau s'il arrive en B avec une vitesse de direction horizontale et de valeur $v_B = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Le mouvement de l'enfant dans l'air est supposé sans frottement.

7. En détaillant votre raisonnement, exprimer, puis calculer la distance horizontale d , mesurée depuis B, parcourue par l'enfant lorsqu'il arrive au contact avec l'eau au point C.

Une fois arrivé en C l'enfant poursuit sa trajectoire sous l'eau. Il est alors toujours assimilé à un point matériel M de masse m , soumis à 3 forces : 2 forces verticales (le poids et la poussée d'Archimède) ainsi qu'une force de frottement fluide exercée par l'eau $\vec{F} = -K\vec{v}$ qui se décompose en une composante verticale et une composante horizontale.

Par la suite on ne s'intéressera qu'à la composante $v_x(t)$ de la vitesse $\vec{v}$ de l'enfant selon l'axe (Ox) horizontal. Pour l'étude de cette phase du mouvement une nouvelle origine des temps sera choisie en C.

8. Montrer que cette composante horizontale de vitesse $v_x(t)$ répond à l'équation différentielle :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m} v_x = 0$$

9. En déduire dans ce cas l'expression d'un temps caractéristique de ralentissement τ .

10. Justifier le fait que $v_x(t = 0) = v_x(C) = v_B$.

Une analyse vidéo a permis d'obtenir en **figure 2** la courbe d'évolution de $v_x(t)$.

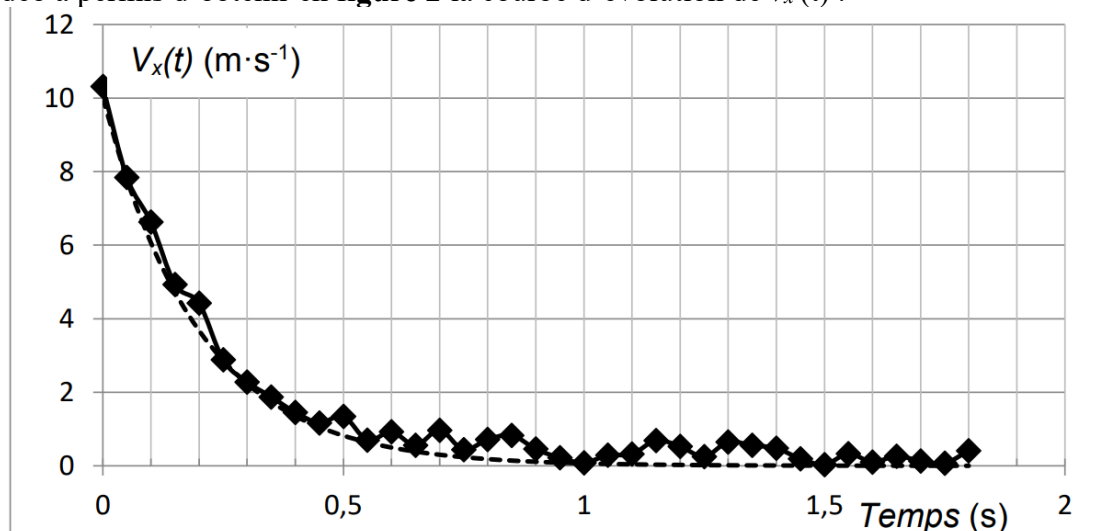


Figure 2 - Évolution de la composante horizontale de la vitesse, $v_x(t)$, en fonction du temps

11. Montrer que le modèle précédent est compatible avec cette courbe.
12. En déduire alors graphiquement, en déterminant la valeur du temps caractéristique τ , la valeur du coefficient k de la force de frottement fluide.
13. Déterminer l'expression de l'abscisse de $x(t)$ du point M en choisissant l'origine des abscisses au point C. En déduire la distance horizontale, notée d' et mesurée à partir du point C, qui peut être parcourue sous l'eau par le point M.
14. Donner alors la valeur de la distance de sécurité à respecter à partir de la sortie du toboggan.

Problème n°2 : l'Uranium, combustible nucléaire

(d'après Concours G2E 2009 et G2E 2015)

Partie I : apport thermique dans la source chaude d'une centrale nucléaire.

Dans un réacteur nucléaire, le combustible est de l'uranium, sous forme de cylindres de rayon $R = 1\text{ cm}$, de longueur $L = 4\text{ m}$ recouverts d'une fine couche de zirconium d'épaisseur négligeable. L'ensemble uranium-zirconium constitue un « crayon » (Figure 1). L'uranium contenu dans chaque « crayon » dégage une puissance volumique $P_v = 200\text{ MW.m}^{-3}$ due aux réactions nucléaires qui s'y produisent. Cette puissance est évacuée par conduction radiale vers l'extérieur du crayon et est utilisée pour chauffer l'eau qui décrit le cycle moteur de la centrale nucléaire.

La température extérieure de l'uranium d'un « crayon » est maintenue constante à $T_e = 600\text{ K}$, et on se place en régime permanent, à savoir qu'en tout point M de l'uranium, la température ne dépend plus du temps. On suppose également qu'elle dépend uniquement de la distance r du point M à l'axe du cylindre.

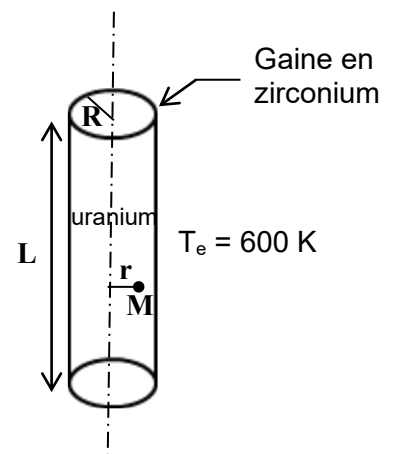


Figure 1 – structure d'un crayon

Données : pour l'uranium

- conductivité thermique : $\lambda = 3$ en unité S.I.
- Température de fusion $T_{Fu} = 2900\text{ K}$

1. Rappeler la loi de Fourier et donner l'unité de λ dans le système international (S.I.).
2. A partir d'un bilan thermique dans une couche d'uranium comprise entre les cylindres coaxiaux de rayons r et $(r+dr)$, montrer que le flux thermique $\Phi_{th}(r)$ à l'intérieur du crayon vérifie l'équation différentielle :
$$\frac{d\Phi_{th}}{dr} = 2\pi L P_v \cdot r$$
3. Etablir l'expression du flux thermique $\Phi_{th}(r)$ traversant le crayon à la distance r de son axe en considérant le flux thermique nul en $r = 0$.
4. En déduire la loi $T(r)$ donnant la température à l'intérieur du crayon en fonction de T_e , R , P_v , λ et r . Pour quelle valeur de r la température est-elle maximale ?
5. Quelle est la valeur maximale R_{max} du rayon du crayon au-delà de laquelle la fusion du combustible risque d'intervenir ? La valeur de $R = 1\text{ cm}$ est-elle bien choisie ?

6. Calculer le flux thermique $\phi_{th}(R)$, traversant la surface latérale de la gaine en zirconium.

La centrale nucléaire fonctionne selon un cycle moteur décrit par l'eau. Elle produit une puissance électrique de 1,3 GW. Son rendement est de 37 %.

7. En déduire le nombre de « crayons » contenus dans le cœur du réacteur nucléaire.

Partie II : diffusion des neutrons dans un crayon d'uranium.

On étudie la diffusion, en régime permanent, des neutrons émis par les réactions nucléaires dans l'uranium au cœur d'un crayon du réacteur. On considère la diffusion axiale selon l'axe Ox du crayon limité par ses sections d'abscisses $x = -L/2$ et $x = L/2$. On note $C(x)$ la concentration neutronique dans l'uranium du crayon sur une section d'abscisse x (Figure 2).

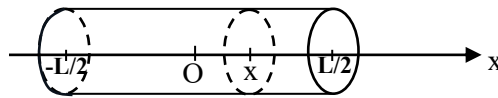


Figure 2 : Diffusion axiale des neutrons

8. Rappeler la loi de Fick et justifier la présence du signe moins dans la loi.

Deux phénomènes se produisent dans le milieu fissile :

- La réaction de fission absorbe des neutrons et on considère qu'en moyenne $\frac{C(x)}{\tau}$ neutrons sont absorbés par unité de temps et de volume.
- La réaction produit de nouveaux neutrons et on considère que pour un neutron absorbé, il y a k neutrons produits ($k > 1$).

9. En faisant le bilan neutronique en régime permanent, dans une tranche comprise entre x et $x + dx$, montrer que $C(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 C(x)}{dx^2} + \frac{\alpha}{D} C(x) = 0$$

où α est une constante que l'on exprimera en fonction de k et τ .

Le crayon étant limité par les plans $x = \pm L/2$ les concentrations en neutrons sont nulles aux extrémités de sorte que $C(\pm L/2) = 0$, et on pose $C(0) = C_0$.

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $C(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$.

10. Justifier brièvement la forme générale des solutions et exprimer λ en fonction de D et α .

11. Déterminer la valeur de A , puis montrer que B est nécessairement nul, et montrer enfin que les conditions aux limites ne sont effectivement possibles que pour une valeur particulière de k que l'on exprimera en fonction de L , D et τ .