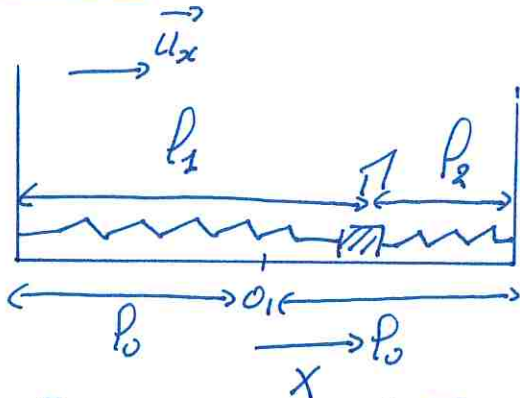


Devoir surveillé n°4

Corrigé

Problème : accéléromètres et applications.



$$1. \vec{F}_1 = -k(l_1 - l_0) \vec{e}_{l_1}$$

avec $\vec{e}_{l_1} = \vec{u}_x$
 $l_1 - l_0 = x$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = -kx \vec{u}_x$$

$$\bullet \vec{F}_2 = -k(l_2 - l_0) \vec{e}_{l_2} \text{ avec } \begin{cases} \vec{e}_{l_2} = -\vec{u}_x \\ l_2 - l_0 = -x \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_2 = -kx \vec{u}_x$$

2. Le bâti du téléphone étant immobile, le référentiel R est un référentiel galiléen.

{ masse ponctuelle m }

Bilan des forces : $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_{\text{tot}}, \vec{P}$ et $\vec{R}_0$

PFD dans le référentiel galiléen R, en projection sur l'axe (O₁x)

$$\Rightarrow m \ddot{x} = -kx - kx - 2d\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2d}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

on pose $\begin{cases} \frac{\omega_0}{2} = \frac{2d}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{2k}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \\ 2 = \frac{1}{\frac{2d}{m}} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{2m}} \end{cases}$

3. La masse retrouve le plus rapidement possible sa position d'équilibre sans osciller pour un régime critique : $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} = \frac{1}{2d_{\min}} \sqrt{\frac{k}{2m}} \Rightarrow \underline{\underline{d_{\min} = \sqrt{\frac{k}{2m}}}}$$

Solution : $x(t) = (At + B) \exp\left[-\frac{\omega_0}{2} t\right]$

et $\dot{x}(t) = \left(A - \frac{\omega_0}{2} (At + B)\right) \exp\left[-\frac{\omega_0}{2} t\right]$

$$\boxed{\text{cI}} \quad \begin{cases} X(t=0) = X_0 = B \\ \dot{X}(t=0) = 0 = A - \frac{\omega_0}{2Q} B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = X_0 \\ A = \frac{\omega_0}{2Q} X_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \delta = 1/2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow X(t) = X_0 (\omega_0 t + 1) \exp(-\omega_0 t)$$

4. Le référentiel R , en mouvement, n'est plus galiléen.
on applique le PFD dans R_T avec le même bilan des forces:

$$m \frac{d^2 \vec{O}\vec{T}}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{\text{tot}} = \vec{P} + \vec{R}_N$$

$$\vec{O}\vec{T} = \vec{O}\vec{A} + \vec{A}\vec{T} \Rightarrow \frac{d^2 \vec{O}\vec{T}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{O}\vec{A}}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{A}\vec{T}}{dt^2} = \ddot{x}_1 \vec{u}_x + \ddot{X} \vec{u}_x$$

Projeté du PFD sur l'axe (Ox) :

$$m (\ddot{x}_1 + \ddot{X}) = -2kX - 2d\dot{X}$$

$$\Rightarrow \ddot{X} + \frac{2d}{m} \dot{X} + \frac{2k}{m} X = -\ddot{x}_1 = -a_1$$

5. Posons $\underline{X}(t) = X_m \exp[j(\omega t + \phi)]$.

$\underline{X}$ vérifie alors l'équation:

$$\ddot{\underline{X}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{X}} + \omega_0^2 \underline{X} = -a_m \exp[j\omega t]$$

$$\Rightarrow \underline{X} (-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) = -a_m \exp[j\omega t]$$

$$\Rightarrow \underline{X} = \frac{-a_m \exp[j\omega t]}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

$$X_m = |\underline{X}| = \frac{a_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{a_m}{\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}$$

$$\text{Posons } u = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow X_m = \frac{a_m}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

6. On observe un phénomène de résonance si la fonction $X_m(u)$ passe par un maximum.

Posez $g(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$

X_m est maximale lorsque g est minimale.

$$g'(u) = -4u(1 - u^2) + \frac{2u}{Q^2}$$

$$g'(u) = 0 \Leftrightarrow \underset{u \neq 0}{-4(1 - u^2) + \frac{1}{Q^2}} = 0 \Rightarrow u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

g présente un minimum si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{et } u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{f_r}{f_0} \Rightarrow f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$7. Q = 5 \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{50}} \approx 1 \Rightarrow f_r \approx f_0$$

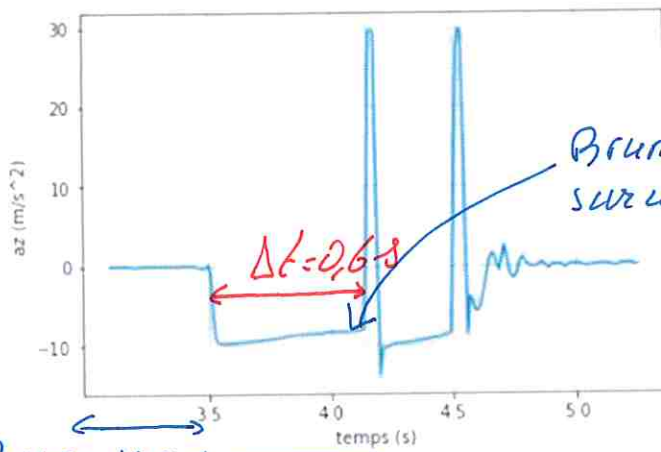
$$f \ll f_r \Rightarrow f \ll f_0 \Rightarrow \frac{f}{f_0} \ll 1 \Rightarrow u \ll 1$$

$$\text{D'où } X_m \approx \frac{a_m}{\omega_0^2} = \frac{m}{2R} a_m = k a_m \text{ avec } k = \frac{m}{2R}$$

8. D'après le document les fréquences du bras, du poignet et des doigts sont inférieures à 30 Hz.

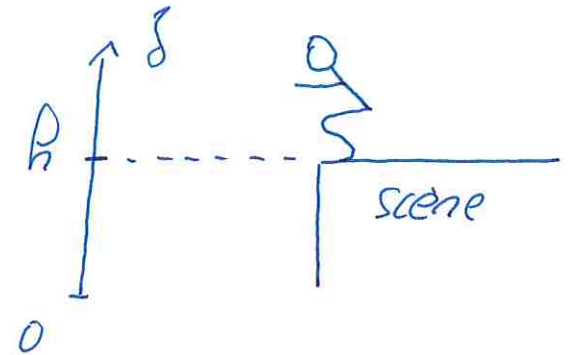
$$\text{or } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 796 \text{ Hz} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow f < 30 \text{ Hz} \ll f_0 = 796 \text{ Hz} \\ \text{La condition est donc remplie.} \end{array} \right\}$$

9. Les 3 graphiques montrent que a_x et a_y sont négligeables durant le temps de chute
 $\Rightarrow$ on ne va considérer que le mouvement selon l'axe vertical (Oz)



← Bruno sur la scène
 ← chute libre avec $a_g \approx -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Bruno rebondit sur un Pic de poivreux



$$\frac{d^2 z}{dt^2} = a_z \Rightarrow \frac{dz}{dt} = a_z t + c_1$$

$\uparrow$
 $= 0$
 (vitesse initiale nulle)

$$\Rightarrow z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + h$$

$\uparrow$
 hauteur initiale

Fin de la chute en $z=0$

$$\Rightarrow h = -\frac{1}{2} a_z t^2$$

AN: $h = -\frac{1}{2} \times (-10) \times 0,6^2 \approx 1,8 \text{ m}$

Problème: étude d'un barrage.

1. Relation fondamentale de la statique des fluides pour un axe (oz) vertical descendant.

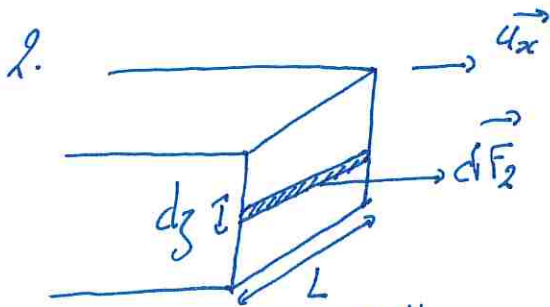
$$\frac{dP}{dz} = +(\rho_{\text{eau}} g) \Rightarrow \int_{P_0}^{P(z)} dP = \int_{z=0}^z (\rho_{\text{eau}} g) dz$$

$$\Rightarrow P(z) = P_0 + (\rho_{\text{eau}} g z)$$

$$\text{D'où } P(H) = P_0 + (\rho_{\text{eau}} g H)$$

$$\text{AN: } \rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$P(H) = 10^5 + 10^3 \times 9,8 \times 160 = 16,7 \text{ bar.}$$



Soit $ds = L dz$ une surface élémentaire sur laquelle la pression exercée par l'eau peut être considérée uniforme.

$$\Rightarrow d\vec{F}_2 = P(z) ds \vec{u}_x = P(z) L dz \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = \int_{z=0}^{z=H} P(z) L dz \vec{u}_x = \int_{z=0}^{z=H} (P_0 + \rho_{\text{eau}} g z) L dz \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = \left(P_0 L H + \rho_{\text{eau}} g L \frac{H^2}{2} \right) \vec{u}_x$$

3. La pression de l'air est uniforme sur la surface S_1

$$\Rightarrow \vec{F}_{1,1} = P_0 S_1 \vec{u}_z = P_0 e_{\text{min}} L \vec{u}_z$$

4. Soit $\vec{F}_{\text{rect}}$ la résultante des forces pressantes sur le mur:

$$\vec{F}_{\text{rect}} = \vec{F}_{1,1} + \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_2 = P_0 e_{\text{min}} L \vec{u}_z + P_0 L (e_{\text{max}} \vec{u}_z - H \vec{u}_x) + \left(P_0 L H + \rho_{\text{eau}} g L \frac{H^2}{2} \right) \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow F_{\text{rect},x} = -P_0 L H + P_0 L H + \rho_{\text{eau}} g L \frac{H^2}{2} = \rho_{\text{eau}} g L \frac{H^2}{2}$$

5. Barrage "rectangle" : $S = H \times L$

Barrage "Serre Pongon" : $S = H \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2}$

$$\Rightarrow L = \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2}$$

$$6. F_{\text{rect},x} - F_{\text{sp},x} = \rho_{\text{eau}} g \frac{H^2}{4} (L_{\max} + L_{\min}) - \frac{\rho_{\text{eau}} g H^2}{6} (L_{\max} + 2L_{\min})$$

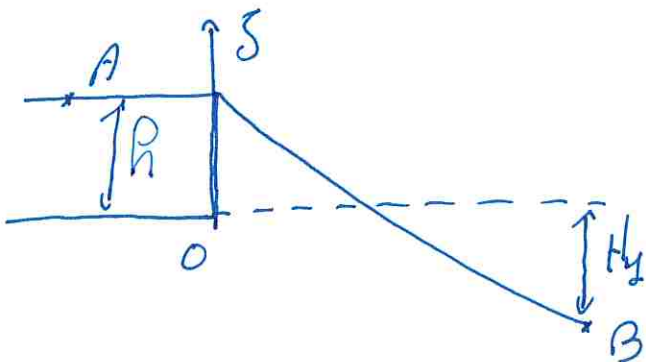
$$\Rightarrow F_{\text{rect},x} - F_{\text{sp},x} = L_{\max} \rho_{\text{eau}} g H^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + L_{\min} \rho_{\text{eau}} g H^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow F_{\text{rect},x} - F_{\text{sp},x} = \rho_{\text{eau}} g H^2 \times \frac{1}{12} (L_{\max} - L_{\min}) > 0$$

$\Rightarrow F_{\text{sp},x} < F_{\text{rect},x}$: Le barrage type Serre Pongon diminue la force pressante horizontale pour une même hauteur d'eau.

7. Relation de Bernoulli : $\frac{1}{2} v^2 + g z + \frac{P}{\rho} = \text{cte}$

- (H) $\Rightarrow$
- * fluide incompressible
 - * fluide parfait
 - * régime stationnaire
 - * pas de travail utile.



• Relation de Bernoulli entre A et B :

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2} v_A^2 + g z_A = \frac{1}{2} v_B^2 + \frac{P_B}{\rho} + g z_B \quad (1)$$

avec : $P_A = P_B = P_0$
 $z_A = H$ et $z_B = -H_1$.

Régime stationnaire } $\Rightarrow v_0 = \text{cte} \Rightarrow v_A = v_B$
 Fluide incompressible } $\Rightarrow v_A S_{re} = v_B S$

or $S \ll S_{re} \Rightarrow v_A \ll v_B$

$$1) \Rightarrow gR = \frac{1}{2} v_B^2 - gH_1 \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(R+H_1)}$$

$$\bullet \text{ or } v_h = -\frac{dh}{dt} \Rightarrow v_h S_{re} = v_B S$$

$$\Rightarrow -\frac{dh}{dt} S_{re} = S \sqrt{2g(R+H_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{S}{S_{re}} \sqrt{2g(R+H_1)}$$

3. Séparation des variables

$$\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{R+H_1}} = -\frac{S}{S_{re}} \sqrt{2g} \int_0^{T_H} dt \Rightarrow \left[2\sqrt{R+H_1} \right]_H^0 = -\frac{S}{S_{re}} \sqrt{2g} T_H$$

$$\Rightarrow T_H = \frac{S_{re}}{S} \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(\sqrt{H+H_1} - \sqrt{H_1} \right)$$