

Devoir surveillé n°4

Problème n°1 : accéléromètres et applications

(d'après Agrégation interne de sciences physiques 2021, concours CCINP MP 2021 et concours ATS 2021)

Les premiers accéléromètres utilisant des MEMS datent de 1980 et sont utilisés pour déclencher des airbags. À la suite d'une forte diminution de leur prix et de leur miniaturisation, ils sont présents dans les consoles de jeux vidéo puis dans les smartphones où ils jouent un rôle important : orientation portrait/paysage, stabilisation photographique, etc.

Un exemple de structure interne d'un accéléromètre uniaxe est présenté sur la figure 1. L'image obtenue en microscopie électronique à balayage montre une structure en deux parties imbriquées : un bâti rigide dans lequel peut se déplacer une masse « sismique » notée M. Une accélération de l'ensemble provoque le déplacement de M par rapport au bâti. Chaque partie comporte un double peigne, et l'imbrication des dents forme un condensateur. Une mesure électrique de sa capacité permet de remonter à la valeur de l'accélération.

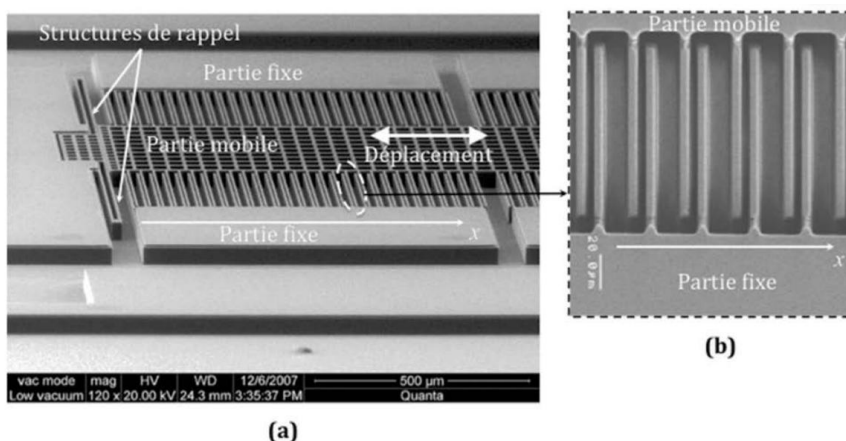


Figure 1 : (a) image d'un MEMS accéléromètre uniaxe réalisée en microscopie électronique à balayage, la direction du déplacement possible est symbolisée par une double flèche, (b) détail de l'imbrication des peignes des parties mobile et fixe lors d'une accélération. D'après G. Dai et al., *Sensors and Actuators A : Physical*, 172, (2011), 369–378.

I/ Comportement mécanique de l'accéléromètre d'un téléphone

À l'instant t , l'accéléromètre du téléphone est soumis à une accélération par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen.

- On note **R_T le référentiel du laboratoire** supposé galiléen, de centre O fixe et muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ dans ce référentiel. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre, on prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.
- On note **R le référentiel lié au téléphone**. Dans un premier temps, R est astreint à un mouvement de translation selon la direction (Ox) .

Le modèle mécanique utilisé est réduit à une dent mobile M , de masse $m = 0,14 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$, entourée de deux dents fixées au bâti de l'accéléromètre. Il est représenté sur la figure 2. Les dents du bâti sont séparées d'une distance $2d = 1,3 \text{ }\mu\text{m}$. Des structures de rappel lient M au bâti, elles sont modélisées par des ressorts de rappel identiques de raideur $k = 1,2 \text{ N.m}^{-1}$, de longueur à vide ℓ_0 . Au repos, en l'absence d'accélération, leur longueur vaut ℓ_0 . Leurs actions sur M sont modélisées par deux forces notées $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

Un axe (O_1X) , de vecteur unitaire $\vec{u}_x$ est lié au bâti de l'accéléromètre, son origine O_1 coïncide avec la position au repos de M, par rapport au référentiel du bâti. Le point O_1 est donc situé à une distance ℓ_0 du point d'accroche du ressort 1 et du point d'accroche du ressort 2. On adoptera les notations suivantes :

- $x_M(t)$: position du point M dans le référentiel R_T du laboratoire (de centre O)
- $x_1(t)$: position du point O_1 dans le référentiel R_T du laboratoire (de centre O)
- $X(t) = x_M(t) - x_1(t)$: position du point M dans le référentiel R lié au téléphone (de centre O_1)

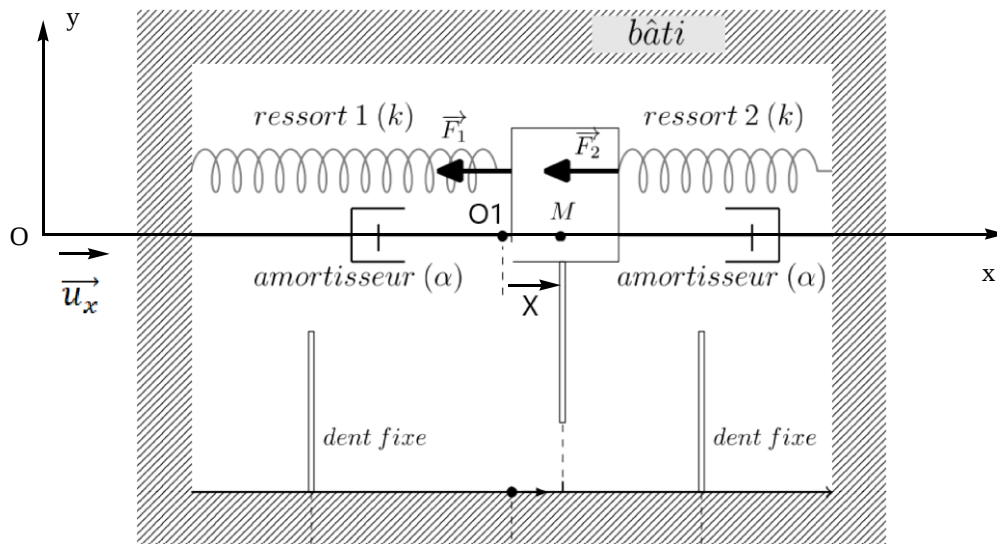


Figure 2

M subit également des frottements modélisés par deux amortisseurs identiques dont l'ensemble exerce une action modélisée par une force résultante $\vec{F}_{tot}$ opposée au mouvement : $\vec{F}_{tot} = -2\alpha \frac{dX}{dt} \vec{u}_x$, où α désigne une constante.

Première étude : téléphone immobile (O_1 immobile)

1. Donner l'expression des deux forces élastiques $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ en fonction de X.
2. Lorsque la masse M est en mouvement, établir l'équation différentielle vérifiée par $X(t)$ sous la forme :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0$$

Donner les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q

3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la masse m est lâchée sans vitesse initiale d'une position $X(t=0) = X_0$. Quelle est la valeur minimale α_{min} qu'il faut imposer à α afin que la masse retrouve le plus rapidement possible sa position d'équilibre sans oscillation ? Donner alors la solution $X(t)$ de l'équation différentielle en fonction de ω_0 et Q notamment, dans le cas où $\alpha = \alpha_{min}$.

Deuxième étude : téléphone en mouvement

Le téléphone est maintenant en mouvement de translation selon l'axe (Ox) et on note $a_1(t)$ l'accélération du bâti, c'est-à-dire l'accélération du point fixe O_1 dans le référentiel R_T du laboratoire.

4. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du laboratoire R_T , déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $X(t)$ en fonction de $a_1(t)$, α , k et m . Montrer qu'elle se met alors sous la forme :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = -a_1 \quad (1)$$

où ω_0 et Q ont la même expression qu'à la question 2.

Dans la suite, nous allons chercher à déterminer les conditions pour lesquelles le déplacement X est proportionnel à l'accélération a_1 que l'on cherche à mesurer. Pour cela on va étudier la réponse du capteur en régime sinusoïdal forcé tel que $a_1 = a_m \cos(\omega t)$ où ω est la pulsation à laquelle oscille le téléphone et $a_m > 0$ est une constante. Dans ces conditions la solution $X(t)$ en régime sinusoïdal forcé est de la forme $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ où X_m est l'amplitude des oscillations de la masse m .

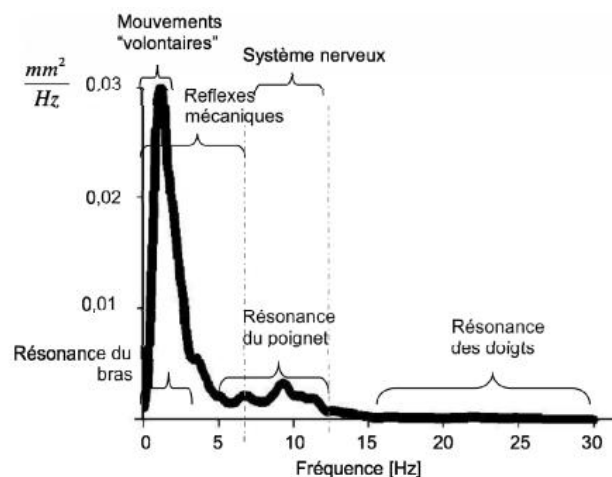
5. En posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, montrer que : $X_m = \frac{a_m}{\omega_0^2 \sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$
6. Montrer qu'il est possible d'observer un phénomène de résonance en amplitude à la fréquence $f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, où f_0 est la fréquence propre de l'oscillateur. A quelle condition sur Q ce phénomène est-il observable ?
7. On stimule expérimentalement le capteur à des fréquences $f \ll f_r$ dans le cas où $Q = 5$. Justifier alors que $f_r \approx f_0$ et montrer que $X_m \approx K a_m$ où K est une constante que l'on exprimera en fonction des données du sujet.

II/ Applications

Après dix années d'absence, Bruno Mars revient enfin pour trois concerts en France. Un fan toulousain, capture les vidéos de cet événement à l'aide de son smartphone. L'émotion est palpable mais l'accéléromètre embarqué dans le téléphone va permettre de stabiliser les vidéos.

Le document ci-dessous est une synthèse de l'analyse spectrale du tremblement de la main (pour un être humain) ainsi que de ses origines. Il représente la répartition fréquentielle de l'amplitude des mouvements. L'unité de l'axe des ordonnées n'a pas d'importance pour la compréhension du graphique.

Document : analyse spectrale du tremblement humain

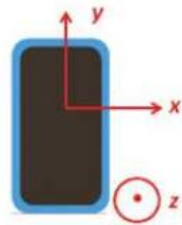


Source : Contribution à des architectures de stabilisation d'images basées sur la perception visuelle et la physiologie du tremblement humain, Fabien Gavant (2012, Thèse de doctorat, Université de Grenoble)

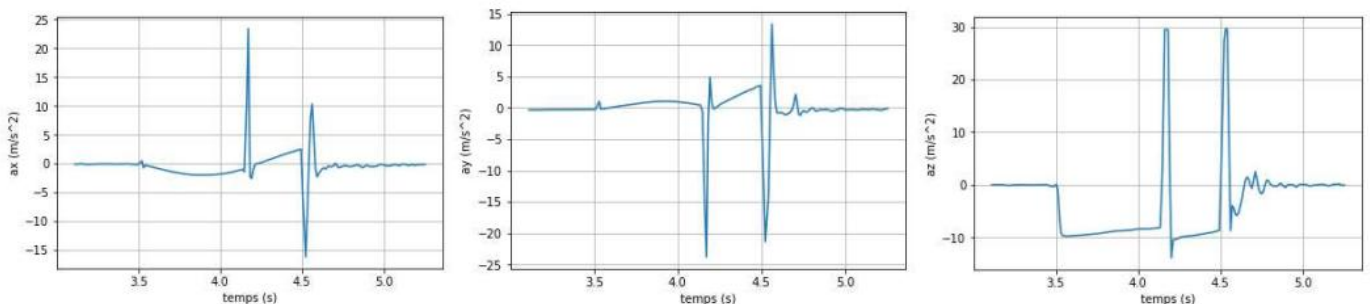
Pour un accéléromètre fonctionnant selon le principe décrit précédemment, on suppose que $Q = 5$ et $\omega_0 = 5.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$.

8. À l'aide de ces valeurs et du document, indiquer si la condition évoquée à la question 7. est remplie pour cet accéléromètre.

Bruno est lui aussi très excité à l'idée de retrouver la scène et ne peut s'empêcher de se jeter dans son public depuis la scène (prudemment tout de même, avec une vitesse initiale presque nulle). Son smartphone, glissé dans la poche de son pantalon a enregistré sa chute. Les téléphones sont munis de 3 accéléromètres permettant d'apprécier l'accélération du téléphone suivant les trois directions de l'espace. Il est alors possible d'afficher ces 3 accélérations : a_x (accélération suivant x), a_y (accélération suivant y), a_z (accélération suivant z)



On donne ci-dessous, les relevés d'accélération de son téléphone.
Les axes temporels sont gradués entre 3,5 s et 5,0 s. On indique qu'à la fin de sa chute, Bruno a littéralement rebondi sur ses fans venus en nombre !



9. Estimer la hauteur h de chute de Bruno en explicitant votre démarche (graphe(s) utilisé(s), hypothèse(s), calculs, ...)

Problème n°2 : étude d'un barrage (d'après Concours G2E 2025 et concours ENS BCPST 2012)

I/ Force de pression exercée sur le mur d'un barrage

Le barrage étudié (la figure 1 représente le barrage vu de profil) est constitué d'un mur plan de hauteur $H = 160 \text{ m}$ et de largeur $L = 550 \text{ m}$ (suivant la direction Oy perpendiculaire au schéma).

L'épaisseur du barrage est de $e_{min} = 10$ m au sommet et de $e_{max} = 520$ m à la base. On donne : $P_0 = 1,0$ bar, la valeur de la pression atmosphérique. On suppose que le barrage est rempli d'eau sur toute sa hauteur.

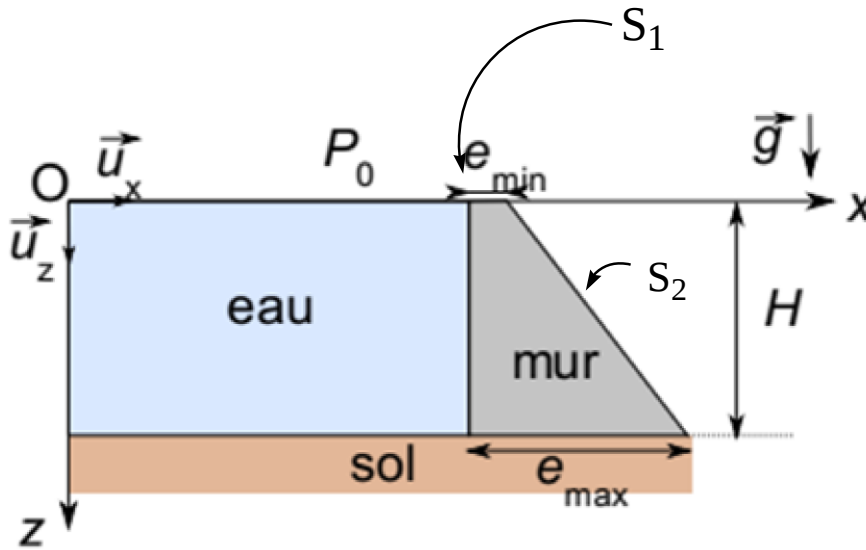


Figure 1 : vue de profil d'un barrage rectangle

1. Exprimer littéralement la pression (z) dans l'eau puis calculer (H) à la base du barrage après avoir rappelé l'ordre de grandeur usuel de la masse volumique de l'eau ρ_{eau} . On supposera l'eau incompressible.
2. Déterminer l'expression littérale de la force de pression que l'on notera $\vec{F}_2$ exercée par l'eau sur le mur du barrage. Pour cela, on exprimera dans un premier temps l'intensité de la force $d\vec{F}_2$ s'exerçant sur une surface élémentaire judicieusement choisie dont on donnera l'expression.
3. On note S_1 la surface horizontale du mur en contact avec l'air et S_2 la surface « inclinée du mur en contact avec l'air. On donne l'expression de la force, notée $\vec{F}_{1,2}$ exercée par l'air sur la surface S_2 .

$$\vec{F}_{1,2} = P_0 L (e_{max} \vec{u}_z - H \vec{u}_x)$$

Déterminer l'expression littérale de la force de pression que l'on notera $\vec{F}_{1,1}$ exercée par l'air sur la surface horizontale S_1 , en fonction notamment de e_{min} et L .

4. Montrer que la composante horizontale de la résultante des forces pressantes sur un barrage « rectangle » s'écrit : $F_{rect,x} = \frac{\rho_{eau} g H^2}{2} L$.

On s'intéresse maintenant à un barrage de type Serre-Ponçon où le mur du barrage est trapézoïdal et voit sa largeur varier avec la profondeur z (voir figure ci-dessous avec le mur du barrage vu de face) :

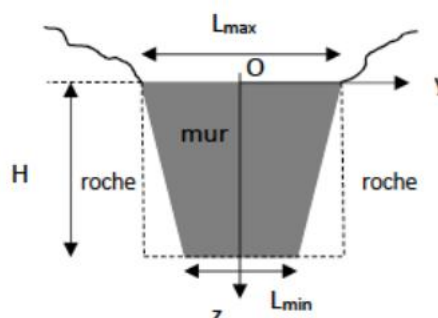


Figure 2 : coupe d'un barrage de type Serre-Ponçon vue de face

5. Déterminer, en fonction de $L_{\max}$ et $L_{\min}$, la largeur L d'un barrage « rectangle » qui aurait la même surface et la même hauteur H que le barrage de type Serre-Ponçon précédent.
6. On peut montrer que l'expression littérale de la composante horizontale de la résultante des forces pressantes sur le mur du barrage de type Serre-Ponçon vaut $F_{SP,x} = \frac{\rho_{\text{eau}} g H^2}{6} (L_{\max} + 2 L_{\min})$. Comparer cette force de pression à celle qui s'exerce sur un barrage rectangle de même surface et conclure sur l'intérêt du barrage de type Serre-Ponçon.

II/ Ecoulement à la sortie du barrage

Le barrage sert à alimenter une turbine à l'aide d'une conduite de section S constante (figure 3). On considère un point B à l'extrémité de la conduite en contact avec l'air (en absence de turbine). On note $h(t)$ la hauteur d'eau restant dans la retenue à un instant t et H la hauteur d'eau dans la retenue initialement. La section de la conduite S vaut 1 m^2 , la surface de la retenue d'eau $S_{\text{re}} = 10000 \text{ m}^2$. On suppose qu'il n'y a pas d'entrée d'eau dans la réserve d'eau. De plus quel que soit la valeur de la hauteur d'eau $h(t)$, l'aire de la surface libre de l'eau contenue dans la retenue, reste constante et égale à S_{re} . La masse volumique de l'eau est considérée constante.

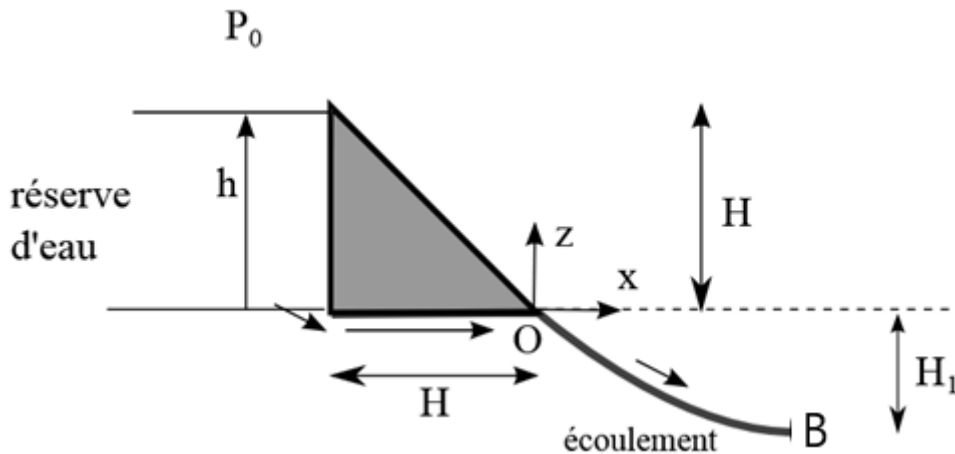


Figure 3

7. Donner la relation de Bernoulli. Quelles sont les hypothèses de validité ?
8. Montrer que l'équation différentielle approchée vérifiée par la hauteur $h(t)$ s'écrit dans le cas où $S \ll S_{\text{re}}$:

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{S}{S_{\text{re}}} \sqrt{2g(h + H_1)}$$

9. En déduire l'expression du temps T_H nécessaire pour vider complètement le barrage.