

Problème n°3 : Action du vent sur le sable des dunes.

Partie I -

$$1. \quad \|\vec{F}_t\| = \frac{1}{2} C_x \rho_{\text{fluide}} S_{\text{frontale}} V^2 \quad \text{sphère} \quad \boxed{\frac{1}{2} C_x \rho_{\text{fluide}} \pi R^2 V^2}$$

2. $Re < 1$: écoulement rampant ; $Re \gg 1$: écoulement turbulent

3. Identification de la formule du 1. à celle du modèle de Stokes.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} C_x \rho \pi R^2 V^2 &= 6\pi\eta R V \quad (\Rightarrow) \quad C_x = \frac{12\eta}{\rho R V} \\ \text{or } Re = \frac{V \times (2R)}{\nu = \eta/\rho} &= \frac{\rho V (2R)}{\eta} \Rightarrow \frac{\eta}{\rho R V} = \frac{2}{Re} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{C_x = \frac{24}{Re}}$$

Soit $\log C_x = \log 24 - \log Re \Rightarrow \log C_x$ en fonction de $\log Re$ est une droite de pente -1 et d'ordonnée à l'origine $\log 24$.

Figure 2 : on relève pour $Re = 10^{-1} \Rightarrow \log Re = -1$, $\log C_x = \log(240)$
 pour $Re = 1 \Rightarrow \log Re = 0$, $\log C_x = \log(24)$

$$\text{Pente} = \frac{\log 240 - \log(24)}{0 - (-1)} = \boxed{-1} \quad \text{en accord.}$$

$$4. \quad Re > 10^4 : C_x \simeq c_x \simeq 0,45 \Rightarrow \|\vec{F}_t\| = \frac{1}{2} \times 0,45 \times \rho \pi R^2 V^2$$

$$\boxed{\|\vec{F}_t\| = 0,225 \rho R^2 V^2}$$

5. PFD appliqué au grain de sable dans le R terrestre :

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}_t = m \vec{g} - 6\pi\eta R \vec{V} \quad (\Rightarrow) \quad m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \vec{g} - 6\pi\eta R \vec{V}$$

Projection sur OX :

$$m \frac{dV_x}{dt} = -6\pi\eta R V_x \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\frac{dV_x}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{m} V_x = 0} \quad (1)$$

Projection sur OZ :

$$m \frac{dV_z}{dt} = -mg - 6\pi\eta R V_z \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\frac{dV_z}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{m} V_z = -g} \quad (2)$$

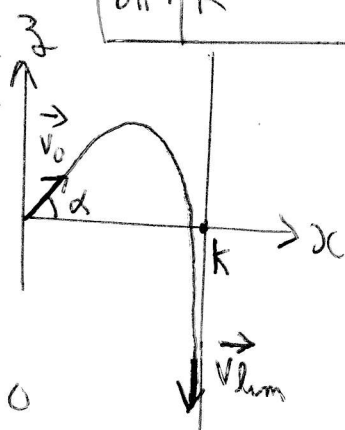
6. Solutions de (1), question 5. $\Rightarrow v_x(t) = A e^{-\frac{6\pi\eta R}{m} t} = A e^{-t/\tau}$
 avec $\tau = \frac{m}{6\pi\eta R}$; à $t=0$ $v_{x0} = v_0 \cos \alpha = A \Rightarrow v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau}$

Primitive de $v_x(t) \Rightarrow x(t) = -\tau v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau} + cte$
 avec $x(t=0) = x_0 = 0 = -\tau v_0 \cos \alpha + cte \Rightarrow cte = \tau v_0 \cos \alpha$
 $x(t) = \tau v_0 \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau})$

Pour $t > t_l = 5\tau$ $e^{-t/\tau} \rightarrow 0$ et $x(t) \rightarrow \tau v_0 \cos \alpha = \frac{m v_0 \cos \alpha}{6\pi\eta R} = k$

A.N. : $k = \frac{0,265 \cdot 10^{-9} \times \frac{2000}{3600} \cos 30^\circ}{6\pi \times 1,8 \cdot 10^{-5} \times \frac{75}{2} \cdot 10^{-6}} = 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$

$t_l = \frac{5 \text{ m}}{6\pi\eta R} = \frac{5 \times 0,265 \cdot 10^{-9}}{6\pi \cdot 1,8 \cdot 10^{-5} \times \frac{75}{2} \cdot 10^{-6}} = 0,104 \text{ s}$



7. Pour $t > t_l$ $e^{-t/\tau} \rightarrow 0$ et d'après 6. $v_x \rightarrow 0$

Donc $\vec{v}_{lim} = v_{z,lim} \vec{u}_z$ or la composante $v_{z,lim}$ de la vitesse sur u_z est la solution particulière de (2) question 5.

Soit $v_{z,lim} = -\frac{g \times m}{6\pi\eta R} \Rightarrow \vec{v}_{lim} = -\frac{mg}{6\pi\eta R} \vec{u}_z$

A.N. : $\|\vec{v}_{lim}\| = \frac{0,265 \cdot 10^{-9} \times 9,81}{6\pi \times 1,8 \cdot 10^{-5} \times \frac{75}{2} \cdot 10^{-6}} = 0,204 \text{ m.s}^{-1}$

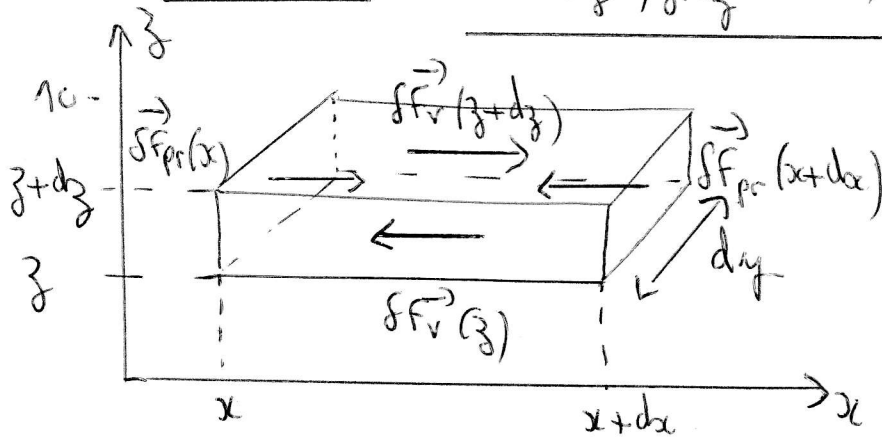
8. $Re = \frac{\|\vec{v}_{lim}\| \times (2R)}{\eta / \rho_{air}} = \frac{0,204 \times 75 \cdot 10^{-6}}{1,8 \cdot 10^{-5} / 1,1} = 0,936 < 1 \Rightarrow$ l'écoulement

relatif de l'air autour du grain est bien rampant $\Rightarrow$ on se situe bien dans la zone de la courbe de la figure 2 pour laquelle F_t est donnée par la loi de Stokes d'après la question 3.

Partie II

$$9. \quad \vec{SF}_v(z) = -\eta \left(\frac{dV(z)}{dz} \right)_z dS // \vec{u}_x = -\eta \left(\frac{dV(z)}{dz} \right)_z (dx dy) \vec{u}_x$$

$$\vec{SF}_v(z+dz) = +\eta \left(\frac{dV(z)}{dz} \right)_{z+dz} (dx dy) \vec{u}_x$$



(P indépendante de x et y)

Forces colinéaires à Ox :

- les 2 forces de viscosité définies à la question 5.

- les forces de pression :

$$\vec{SF}_{pr}(x) = P(z) dy dz \vec{u}_x$$

$$\vec{SF}_{pr}(x+dx) = -P(z) dy dz \vec{u}_x$$

11. Bilan de quantité de mouvement appliqué au SF constitué à t de la particule de fluide précédente + Smg fluide entrant et à t+dt de la particule précédente + Smg fluide sortant). en régime permanent :

$$\frac{d\vec{\Gamma}_{SF}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (=) \quad \frac{d\vec{\Gamma}_{sc}}{dt} + \underbrace{\frac{\vec{\Gamma}_s}{dt} - \frac{\vec{\Gamma}_e}{dt}}_{r. \text{ permanent}} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \text{soit : } \vec{SF}_v(z) + \vec{SF}_v(z+dz) + \vec{SF}_{pr}(x) + \vec{SF}_{pr}(x+dx) = \vec{0}$$

sur Ox

$$\Rightarrow -\eta \left(\frac{dV(z)}{dz} \right)_z (dx dy) + \eta \left(\frac{dV(z)}{dz} \right)_{z+dz} (dx dy) + \underbrace{P(z) dy dz - P(z) dy dz}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \eta \left[\frac{d^2 V(z)}{dz^2} \cdot dz \right] dx dy = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{d^2 V(z)}{dz^2} = 0}$$

12. Primitive du résultat précédent $\Rightarrow \frac{dV(z)}{dz} = cte = a$

$$\Rightarrow V(z) = az + b$$

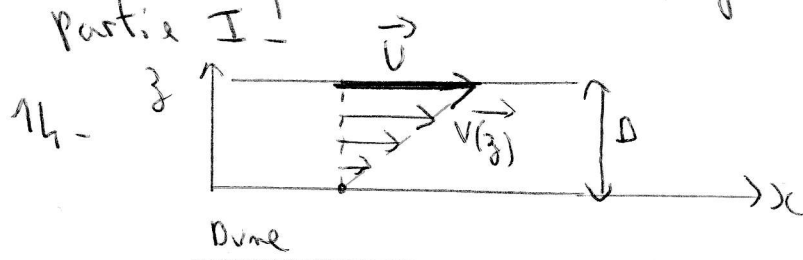
Conditions aux limites : $V(z=0) = 0$ dune fixe en contact avec l'air
 $\Rightarrow b=0$ et $V(z=D) = U$ (vitesse du vent) $\Rightarrow U = a \cdot D \Rightarrow a = \frac{U}{D}$

Donc $\boxed{\vec{V}(z) = \frac{U}{D} \cdot z \cdot \vec{u}_x}$

13. on calcule la vitesse de l'air au niveau du dessus du grain
 c'est à dire en $z = d_{\text{grain}} = 75 \cdot \mu\text{m}$

$$V(z = 75 \cdot 10^{-6} \text{ m}) = \frac{U}{D} d_{\text{grain}} = \frac{(20 \cdot 10^3 / 3600)}{10^{-3}} \times 75 \cdot 10^{-6} = 0,417 \text{ m.s}^{-1}$$

soit $0,417 \times 3600 = 1500 \text{ m.h}^{-1} = 1,5 \text{ km.h}^{-1}$ qui est bien de l'ordre de grandeur de la vitesse initiale du grain (2 km.h^{-1}) communiquée par le vent au grain de sable étudié dans la partie I.



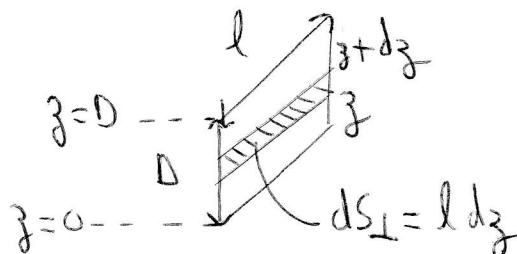
Le modèle conduit à un profil linéaire avec $\frac{dV(z)}{dz} > 0$ et constant alors que le

profil réel n'est pas linéaire. Dans le cas du modèle $V(z)$ continue à croître au dessus de la couche limite alors que dans le profil réel $V(z) = \text{cte} = U$ au dessus de la couche limite. Il y a accord entre les 2 profils en $z=0$ et $z=D$.

15. $\bar{v}_{\text{moy}} = \frac{Q_v}{S_{\perp}}$; on peut calculer Q_v à travers une section de

la couche limite $S_{\perp} = D l$ (l mesurée selon Oy)

$$Q_v = \int_{z=0}^{z=D} V(z) dS_{\perp} = \int_{z=0}^{z=D} V(z) (l dz)$$



$$Q_v = \int_{z=0}^{z=D} \frac{U}{D} z l dz = \frac{U l}{D} \frac{D^2}{2} = \frac{U l D}{2} \Rightarrow \boxed{\bar{v}_{\text{moy}} = \frac{U l D / 2}{D l} = \frac{U}{2} = \frac{2,78 \text{ m.s}^{-1}}{(10 \text{ km.h}^{-1})}}$$

Calcul de $Re = \frac{\bar{v}_{\text{moy}} (D)}{\eta / \rho} = \frac{\rho \bar{v}_{\text{moy}} D}{\eta} = \frac{1,1 \times 2,78 \times 10^{-3}}{1,8 \cdot 10^{-5}} = \boxed{170}$

on a bien $Re < 2000 \Rightarrow$ l'hypothèse de l'écoulement laminaire de l'air est validée dans la couche limite