

Devoir surveillé n°5

Problème n°1 : l'appareil cardiovasculaire

(d'après Concours Agro 2024 et Agrégation externe de sciences physiques 2025)

L'appareil cardiovasculaire est un système circulatoire en circuit fermé qui assure le transport du sang. Il est constitué du cœur et des vaisseaux sanguins.

On distingue la circulation systémique et la circulation pulmonaire :

- la circulation systémique amène le sang chargé en dioxygène (noté O_2 dans la suite du sujet) depuis le cœur gauche jusqu'aux organes puis ramène ce même sang déchargé en O_2 mais chargé en dioxyde de carbone (noté CO_2 dans la suite du sujet) jusqu'au cœur droit.
- la circulation pulmonaire amène ensuite le sang veineux (sang déchargé en O_2 et chargé en CO_2) au contact des alvéoles pulmonaires pour le ré-oxygéner puis renvoie ce sang au cœur gauche via la veine pulmonaire.

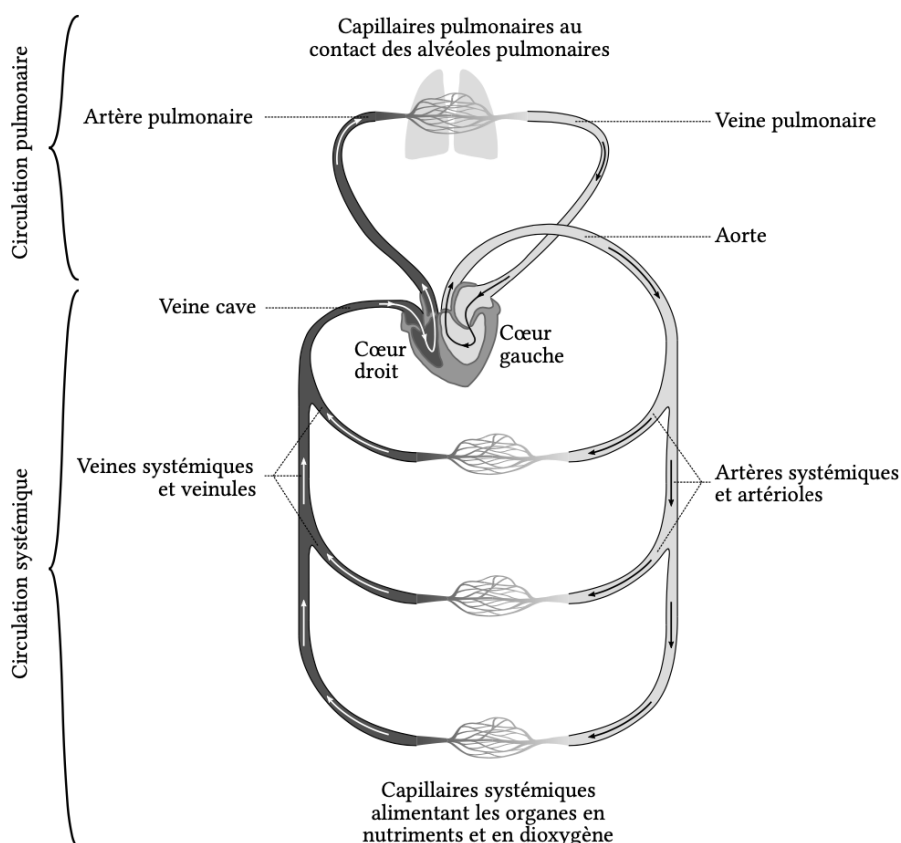


Figure 1 – Schéma simplifié de l'appareil cardiovasculaire.

Le sang coloré en gris clair représente un sang chargé en O_2 et déchargé en CO_2 .
Le sang coloré en gris foncé représente un sang chargé en CO_2 et déchargé en O_2 .

Les flèches indiquent le sens de l'écoulement du sang.

I/ Exploitation des mesures de pression artérielle systémique

Dans toute cette sous-partie, les valeurs de pression artérielle correspondent à la pression différentielle $\Delta P = P - P_{\text{atm}}$. Par exemple, une pression artérielle de 120 mmHg correspond à une pression absolue de 760 mmHg + 120 mmHg = 880 mmHg. De plus, toutes les mesures sont prises pour un individu allongé et au repos.

Document 1 – Pression dans la circulation systémique (Source : Unisciel)

La pression artérielle dans la circulation systémique évolue entre une valeur haute d'environ 120 mmHg et une valeur basse aux alentours de 80 mmHg. La valeur haute correspondant à la pression artérielle systolique pendant la systole ventriculaire.

Pendant cette phase, l'intégralité du volume d'éjection systolique parcourt les artères et entre dans les artérioles alors que seulement un tiers de ce volume en sort. Les deux tiers restants seront propulsés dans le réseau artériolaire pendant la diastole grâce à la restitution de l'énergie élastique que les artères ont stockée pendant la phase de systole.

Ainsi, bien que la pression dans le ventricule gauche soit proche de 0 mmHg pendant la diastole, la pression artérielle diastolique reste relativement élevée (environ 80 mmHg) car une nouvelle contraction cardiaque a lieu avant que les artères ne se vident complètement.

Comme les artères présentent très peu de résistance à l'écoulement, ces valeurs de pression artérielle restent quasi-constantes dans tous les segments artériels. Par contre, c'est au niveau des artérioles que la pression diminue du fait qu'elles offrent une forte résistance à l'écoulement et à leur sortie, les fluctuations entre pressions systolique et diastolique disparaissent, transformant débit et pression pulsates en débit stable et uniforme.

À la sortie des capillaires, la pression veineuse continue à chuter pour atteindre une valeur proche de 3 mmHg au niveau du ventricule droit.

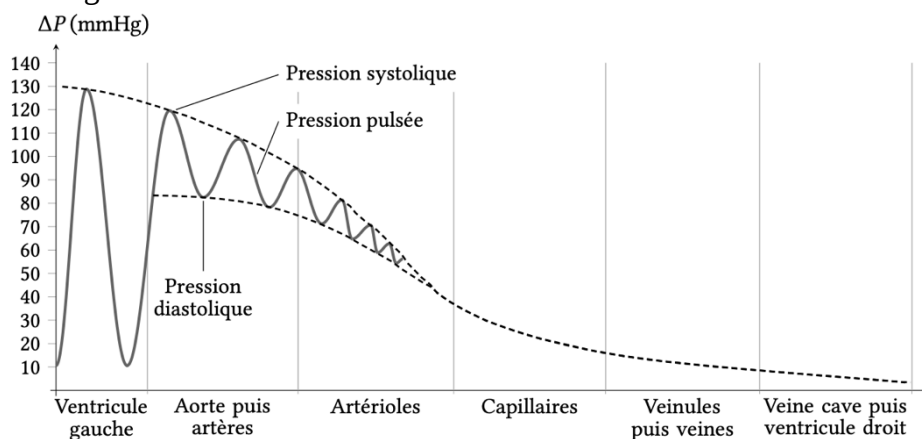


Figure 2 – Évolution simplifiée de la pression dans la circulation systémique à un instant t_0 fixé en fonction du type de vaisseau.

L'axe des abscisses représente la distance par rapport à l'entrée du ventricule gauche.

Une mesure de pression artérielle en fonction du temps est donnée ci-après figure 3.

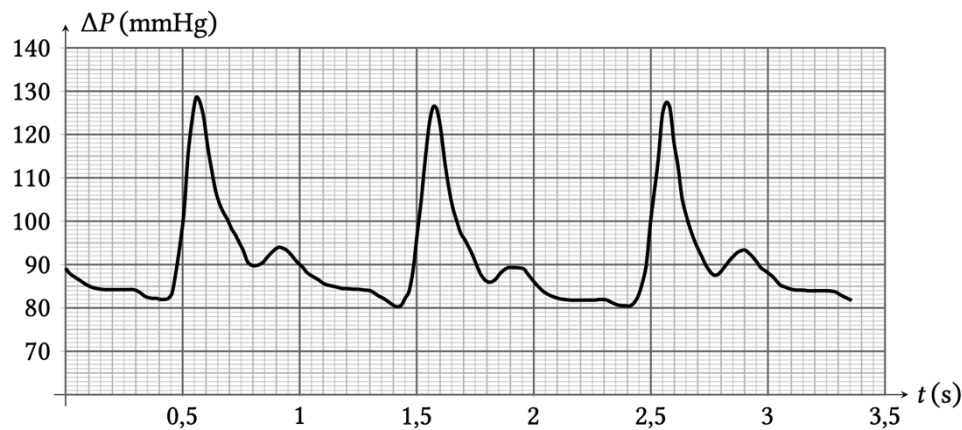


Figure 3 – Mesure de la pression artérielle en fonction du temps.
La mesure est réalisée au niveau de l'artère radiale.

1. Déterminer la pression artérielle systolique $\Delta P_{a,sys}$, la pression artérielle diastolique $\Delta P_{a,dia}$ et estimer la pression artérielle moyenne $\Delta P_{a,moy}$.
2. Les médecins utilisent fréquemment la formule $\Delta P_{a,moy} = \frac{\Delta P_{a,sys} + 2\Delta P_{a,dia}}{3}$ pour calculer la pression artérielle moyenne.
Justifier qualitativement la différence de pondération entre la pression systolique et diastolique.
3. Estimer la fréquence cardiaque f en battements par minute (notés battements $\cdot \text{min}^{-1}$).
4. Sachant que le débit de volume de sang est de $Q_V = 5,0 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$ au repos, déterminer le volume de sang V_1 envoyé par le cœur à chaque battement. On exprimera V_1 en mL.

II/ Écoulement dans un vaisseau sanguin.

On s'intéresse d'abord à l'écoulement horizontal du sang dans un seul vaisseau sanguin qu'on assimile à une conduite cylindrique indéformable de diamètre d et de longueur L (voir figure 4 ci-dessous).

Le sang est un fluide incompressible de masse volumique $\rho_s = 1\,060 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. De plus, dans un souci de simplicité, on considérera que le sang est un fluide newtonien de viscosité dynamique égale à $\eta_s = 1,6 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

L'écoulement du sang est supposé stationnaire et laminaire. Le gradient de pression est uniforme le long de la conduite et on note $\Delta P = P(x=0) - P(x=L) > 0$ la différence de pression entre le début et la fin du vaisseau sanguin considéré.

Le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{u}_x$ en coordonnées cylindriques d'axe (Ox) .

Enfin, la force de viscosité que le sang à l'extérieur du cylindre de rayon $r \leq \frac{d}{2}$, d'axe (Ox) et de longueur L exerce sur le sang situé à l'intérieur de ce cylindre s'écrit :

$$\vec{F}_{visc} = 2\pi r L \eta_s \frac{dv(r)}{dr} \vec{u}_x$$

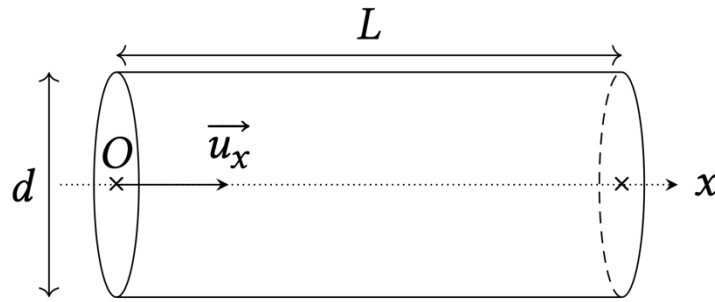


Figure 4 – Vaisseau sanguin assimilable à une conduite horizontale cylindrique.
Le sang s'écoule vers les x croissants.

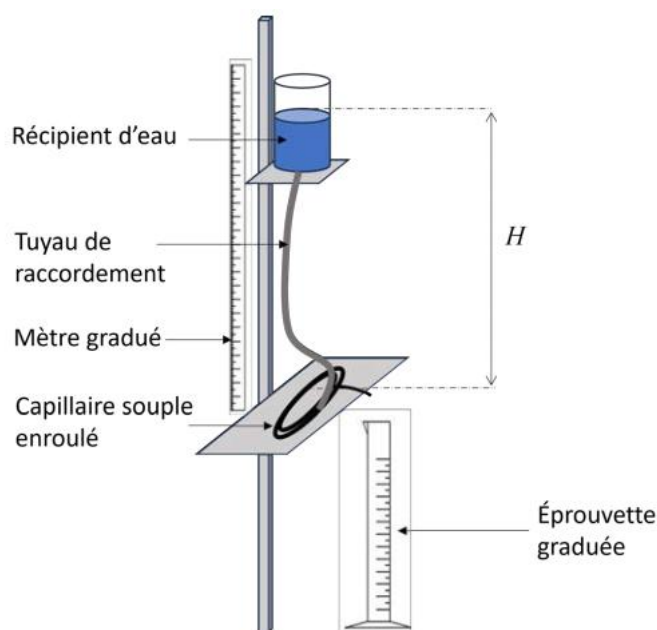
5. À partir d'un **bilan de quantité de mouvement** sur un **système à expliciter**, montrer que la vitesse du fluide s'exprime selon : $\vec{v} = \frac{\Delta P}{4\eta_s L} \left(\frac{d^2}{4} - r^2 \right) \vec{u}_x$.
Représenter ensuite le champ des vitesses dans une section droite de conduite.
6. En déduire l'expression du débit de volume Q_V en fonction des données de l'énoncé.
7. On définit la résistance hydraulique de sorte que $\Delta P = R_h Q_V$. Montrer que la résistance hydraulique s'exprime sous la forme : $R_h = \frac{128\eta_s L}{\pi d^4}$.

III/ Vérification expérimentale de la loi de Poiseuille.

On peut vérifier expérimentalement la loi de Poiseuille avec un liquide comme de l'eau, avec par exemple, le montage schématisé figure 5.

- L'alimentation en eau s'effectue par un réservoir monté sur une glissière maintenue par un système vis-écrou qui permet de faire varier la hauteur H , mesurée par un mètre gradué en cm. On suppose le diamètre du réservoir assez grand pour que le niveau du liquide reste constant pendant l'expérience.
- Le débit est mesuré à l'aide d'une éprouvette graduée en mL et d'un chronomètre précis à la seconde.
- On dispose d'un tube capillaire cylindrique de longueur $L = 1,80$ m et de rayon $R = 0,50$ mm enroulé et fixé sur une planche horizontale surélevée permettant de placer l'éprouvette en sortie du capillaire à la hauteur de la planche. Le rayon de courbure est choisi suffisamment important pour que le modèle abordé à la partie précédente soit valable : le tube capillaire enroulé est ainsi assimilable à un tube capillaire rectiligne horizontal de même longueur L . On pourra donc utiliser la loi de Poiseuille établie à la question 6..
- On appelle ρ_{eau} la masse volumique de l'eau et on cherche à déterminer sa viscosité dynamique η_{eau} . On prendra $\rho_{\text{eau}} = 997,13 \text{ kg.m}^{-3}$.

La valeur de référence publiée de la viscosité dynamique de l'eau à 25°C est $\eta_{\text{eau, référence}} = 8,91 \cdot 10^{-4} \text{ Pa.s}$.

**Figure 5**

8. Exprimer la différence de pression ΔP entre l'entrée et l'extrémité du capillaire enroulé en fonction des données, puis en déduire l'expression du débit volumique Q_v en fonction des données.

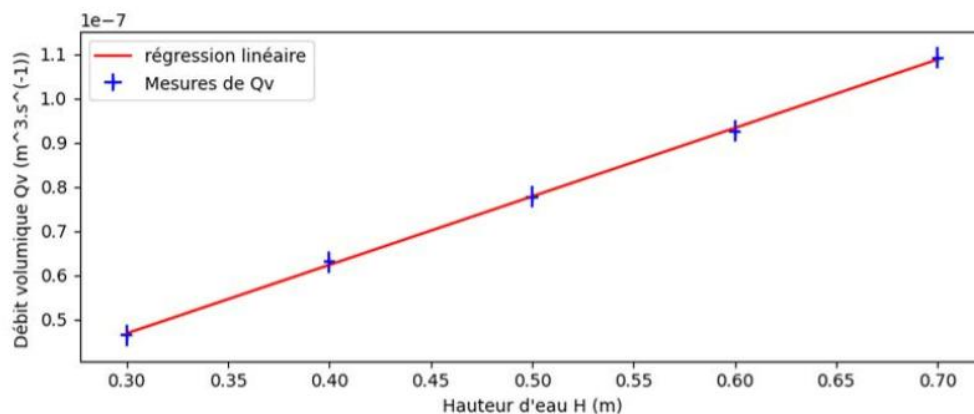
On choisit de mesurer un volume d'eau V_0 récupéré dans l'éprouvette pour une durée $t_0 = 270$ s, pour différentes hauteurs H . On obtient alors les valeurs suivantes :

Hauteur H (cm)	30	40	50	60	70
Volume V_0 (mL)	12,5	17,0	21,0	25,0	29,5

On se propose d'utiliser un programme écrit en langage Python pour :

- modéliser les résultats obtenus par une fonction affine $Q_v = A \times H$ et ainsi vérifier la validité du modèle de l'écoulement de Poiseuille
- déterminer la valeur de A ainsi que son incertitude type
- obtenir une mesure expérimentale de la viscosité dynamique de l'eau associée à son incertitude type.

On fournit le code du programme Python utilisé en annexe 1. Le graphique obtenu est donné dans la figure 6. Les données affichées par l'ordinateur sont présentées sur la figure 7.

**Figure 6** : régression linéaire $Q_v(H)$ des résultats de l'expérience

Coefficient directeur $A = 1.550722348692588e-07 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et $u(A) = 7.77327849386914e-09 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

Ordonnée à l'origine $O = 3.1725836641087085e-10 \text{ m}^3/\text{s}$ et $u(O) = 4.056510839522545e-09 \text{ m}^3/\text{s}$

$\eta_{\text{eau, expérimentale}} = 0.0008608733561925844 \text{ Pa.s}$ et $u(\eta_{\text{eau expérimentale}}) = 4.829497784826028e-05 \text{ Pa.s}$

Figure 7 : valeurs affichées dans la console

9. Identifier, dans le programme, la fonction permettant d'obtenir les paramètres de la modélisation de la relation Q_v en fonction de H par régression linéaire ainsi que le numéro de la ligne à laquelle cette fonction est utilisée.
Discuter en argumentant la validité du modèle de l'écoulement de Poiseuille.
Proposer une valeur de A et son incertitude.
10. Expliquer sommairement l'objectif et le principe de la méthode dite de Monte Carlo présentée de la ligne 45 à 53. Compléter la ligne 51.
11. Expliquer comment le programme calcule une valeur de $\eta_{\text{eau, expérimentale}}$ et de son incertitude $u(\eta_{\text{eau, expérimentale}})$ et préciser les lignes de commande correspondantes.
En comparant la valeur obtenue pour $\eta_{\text{eau, expérimentale}}$ avec la valeur de référence $\eta_{\text{eau, référence}}$ à 25°C , conclure sur la validité de l'expérience comme moyen expérimental de déterminer η_{eau} .

IV/ Introduction à l'hémodynamique

L'hémodynamique (ou « dynamique du sang ») est la science des propriétés physiques de la circulation sanguine en mouvement dans le système cardiovasculaire.

On propose dans cette partie d'étudier de manière simplifiée quelques aspects de l'hémodynamique. Dans toute cette partie l'individu est allongé et au repos.

Dans la suite du sujet, la relation $\Delta P = R_h Q_v$ avec $R_h = \frac{128\eta_s L}{\pi d^4}$ constitue la loi de Poiseuille.

On souhaite prendre en compte l'ensemble des vaisseaux sanguins de la circulation systémique pour estimer la perte de charge entre la sortie du cœur gauche et l'entrée du cœur droit.

Document 2 – Caractéristiques des vaisseaux

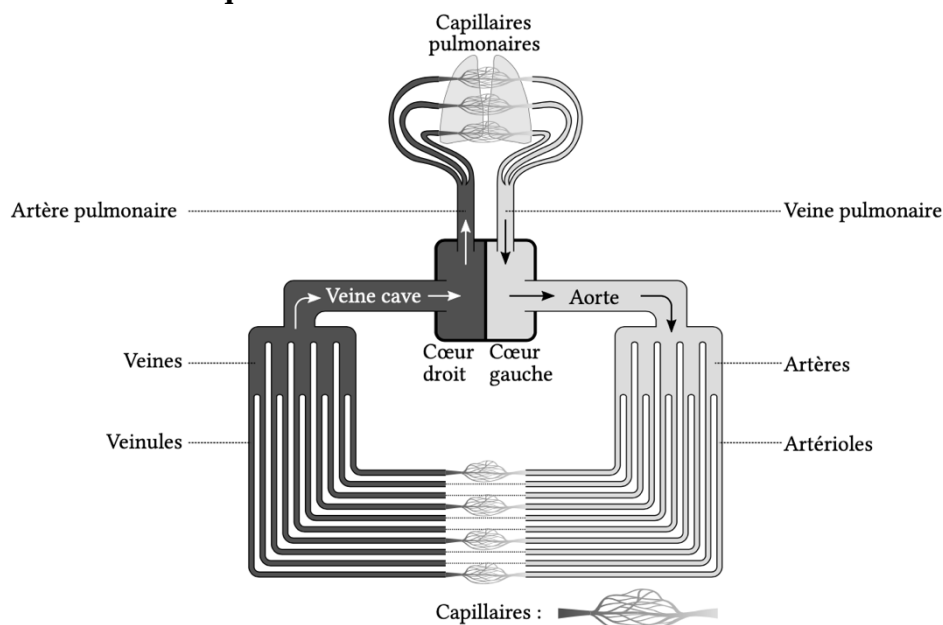


FIGURE 8 – Schéma simplifié présentant les différents types de vaisseaux rencontrés par le sang lors de son écoulement. Le nombre de vaisseaux, les diamètres, et les longueurs ne sont pas à l'échelle.

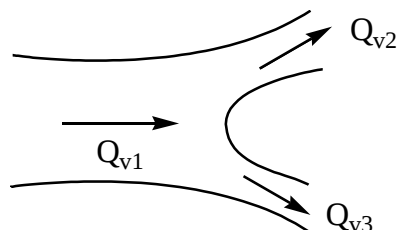
Position	Pression moyenne (mmHg)	Diamètre moyen (mm)	Longueur typique (mm)	Vitesse moyenne (m/s)
<i>Circulation systémique</i>				
Atrium gauche	5			
Ventricule gauche	100			
Aorte	100	20	500	$2,65 \times 10^{-1}$
Artères	95	4	500	$2,50 \times 10^{-1}$
Artérioles	86	0,05	10	$2,80 \times 10^{-2}$
Capillaires	30	0,008	1	$0,50 \times 10^{-3}$
Veinules	10	0,02	2	$1,10 \times 10^{-3}$
Veines	4	5	25	$5,50 \times 10^{-3}$
Veine cave	3	30	500	$1,20 \times 10^{-1}$
Atrium droit	3			

TABLE 1 – Caractéristiques des différents vaisseaux de la circulation systémique. La pression moyenne est donnée en entrée des vaisseaux sanguins. Ces données sont estimées pour un individu allongé et au repos. Cet individu est jeune et en bonne santé.

On se propose de calculer la perte de charge due aux artérioles afin d'effectuer une comparaison avec les données réelles. On supposera que la loi de Poiseuille peut s'appliquer dans tous les vaisseaux sanguins.

12. Rappeler la définition de la vitesse moyenne d'écoulement d'un fluide en fonction du débit volumique Q_v . À partir du tableau 1, déterminer le débit de volume du sang dans l'aorte $Q_{v,a}$.

13. On considère le schéma ci-contre pour l'écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide. Donner la relation entre les débits volumiques Q_{v1} , Q_{v2} et Q_{v3} .



Justifier ensuite que le nombre d'artéριοles dans le corps humain vaut environ $N_{\text{artéριοles}} \simeq 1,5 \times 10^6$.

14. En prenant $Q_V = 5,0 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$, estimer les pertes de charge $\Delta P_{\text{artéριοles}}$ dans les artéριοles. Comparer cette valeur à celle pouvant être déterminée à partir du tableau 1. Commenter et proposer une brève explication aux écarts observés entre les deux valeurs.

ANNEXE 1 : programme Python sur l'expérience de Poiseuille

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import random
4 import statistics
5
6
7 ### Données :
8
9 rho_eau= 997.13 # Masse volumique de l'eau à 25 degrés Celsius en kg.m^(-3)
10 g=9.81 # Accélération de la pesanteur en m.s^(-2)
11 L=1.80 # Longueur du tube en m
12 R=0.50*10**(-3) # Rayon du tube en m
13 t0=270 # durée de l'expérience en s
14 H=np.array([30*10**(-2),40*10**(-2), 50*10**(-2), 60*10**(-2), 70*10**(-2)]) # Valeurs de H en m
15 V0=np.array([12.5*10**(-6),17*10**(-6), 21*10**(-6), 25*10**(-6), 29.5*10**(-6)]) # Valeurs de V0 en m^3
16 Qv=V0/t0 # Calcul de Qv en m^3/s
17
18 ### Evaluation d'incertitudes :
19
20 u_L=10**(-2)/(12)**(1/2) # Incertitude sur la longueur du tube en m
21 u_R=(0.505*10**(-3)-0.495*10**(-3))/(2*(3)**(1/2)) # Incertitude sur le rayon du tube en m
22 u_t0= 1 # incertitude sur la durée de l'expérience en s
23 u_H=1*10**(-2)/12**1/2 # incertitude sur la mesure de H en m
24 u_V0=((10**(-6)/12**1/2)**2+(10**(-6)/3**1/2)**2)**1/2 # incertitude sur la mesure de V0 en m^3
25 u_Qv= Qv*((u_V0/V0)**2+(u_t0/t0)**2)**1/2 # incertitude sur le calcul de Qv en m^3/s
26
27 ### Simulation Monte Carlo pour la détermination de Qv=A*H:
28
29 n_simulation=10000
30
31 pente, ordonnee=np.zeros(n_simulation),np.zeros(n_simulation) # crée deux tableaux remplis de 0
32 for i in range(n_simulation):
33     Qv_simule=np.random.normal(Qv,u_Qv)
34     H_simule=np.random.normal(H,u_H)
35     modelisation=np.polyfit(H_simule, Qv_simule,1)
36     pente[i], ordonnee[i]=modelisation #remplit la case i du tableau avec les résultats de la simulation
37
38 A=np.mean(pente)
39 u_A=np.std(pente)
40 O=np.mean(ordonnee)
41 u_O=np.std(ordonnee)
42
43 regression=H*A+O
44
45 ### Simulation de Monte Carlo pour évaluer la viscosité dynamique eta et son incertitude type:
46
47 n_simulation=10000
48
49 L1=np.random.normal(L,u_L,n_simulation) #crée un tableau de valeur random de L1
50 R1=np.random.normal(R,u_R,n_simulation) #crée un tableau de valeur random de R1
51 A1=
52
53 eta_eau= 3.14*R1**4*rho_eau*g/(8*L1*A1) #calcul de la viscosité dynamique de l'eau
54
55 ### Affichage des résultats de la manipulation et de la régression linéaire
56
57 plt.subplot(2,1,1)
58 plt.errorbar(H,Qv,xerr=u_H,yerr=u_Qv,fmt='b+', label='Mesures de Qv')
59 plt.plot(H, regression, 'r', label='régression linéaire')
60 plt.xlabel("Hauteur d'eau H (m)")
61 plt.ylabel("Débit volumique Qv (m^3.s^(-1)) ")
62 plt.legend()
63
64 print("coefficient directeur A = ", A,"m^2.s^(-1) et u(A)=", u_A,"m^2.s^(-1)" )
65 print("ordonnée à l'origine O=",O,"m^3/s et u(O)=", u_O,"m^3/s")

```

```

78 ## Obtention de la viscosité dynamique et de son incertitude type:
79
80 eta_eauexp=np.mean( eta_eau)
81 u_etaeauexp=np.std( eta_eau)
82 print("eta_eau , experimentale= ", eta_eauexp, "Pa.s et u(eta_eau experimentale)=", u_etaeauexp,"Pa.s")
83
84
85 plt.show()

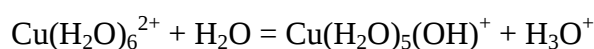
```

Problème n°2 : le cuivre en solution (d'après Concours Communs Polytechniques TSI 2008)

On considère 1 litre d'une solution de nitrate de cuivre (II), $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$, de concentration $c_0 = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. On précise que le nitrate de cuivre (II) à la concentration c_0 est totalement soluble dans l'eau. Lorsqu'on augmente le pH de cette solution, en négligeant toute dilution, l'ion Cu^{2+} peut donner un précipité de $\text{Cu}(\text{OH})_{2(s)}$ de produit de solubilité $K_{s1} = 10^{-20}$.

1. Déterminer le pH de début d'apparition de $\text{Cu}(\text{OH})_{2(s)}$ dans la solution de nitrate de cuivre (II) de concentration $c_0 = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

L'ion Cu^{2+} s'entoure en fait spontanément de 6 molécules d'eau pour former $\text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_6^{2+}$, capable de céder un proton en réagissant avec l'eau, selon l'équation de réaction suivante :

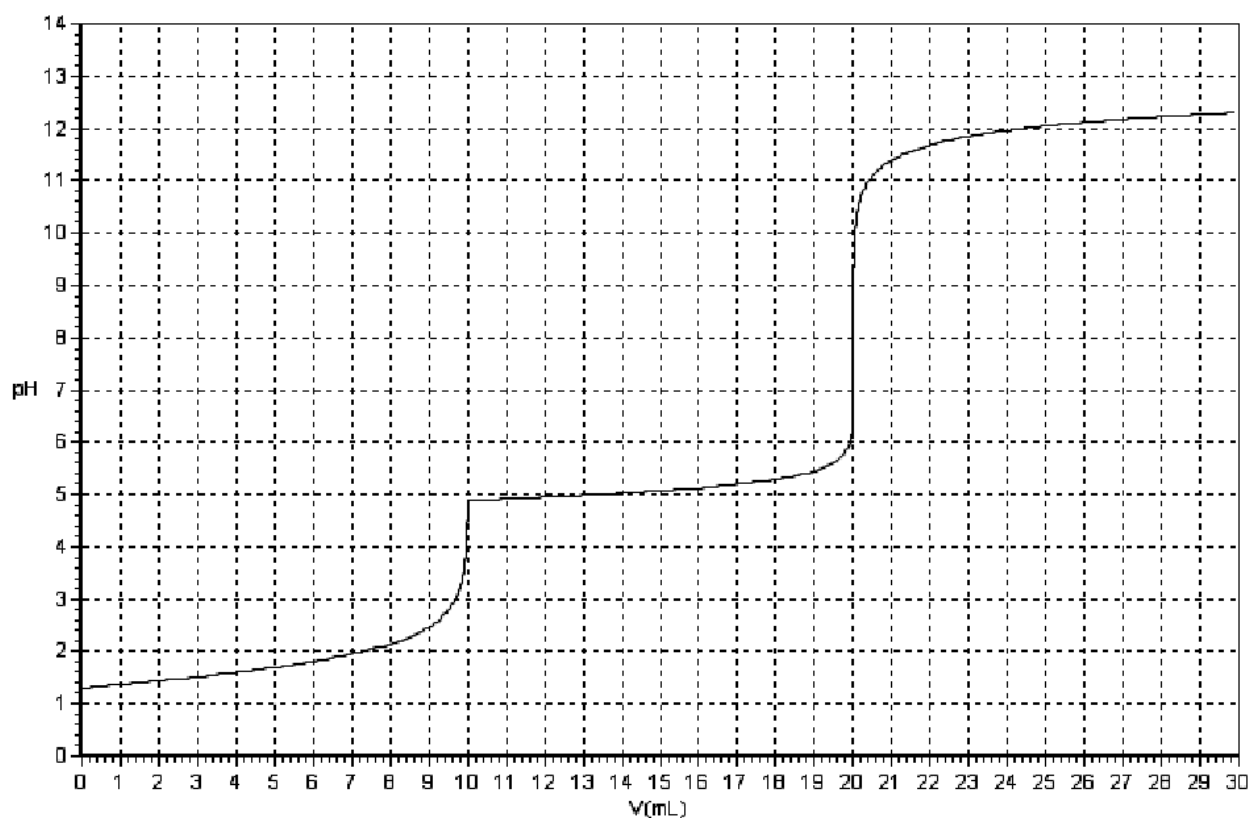


Le pH de la solution de nitrate de cuivre (II) de concentration $c_0 = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ obtenue vaut 4,6.

2. Déterminer le pKa du couple acide base $\text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_6^{2+} / \text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_5(\text{OH})^+$.
3. Montrer qu'au pH de début d'apparition de $\text{Cu}(\text{OH})_{2(s)}$ on peut négliger la réaction de dissociation de l'acide $\text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_6^{2+}$ dans l'eau.

Dans la suite du problème, on néglige de fait l'acidité de l'ion Cu^{2+} .

On réalise le dosage pH-métrique de $V_0 = 10 \text{ mL}$ d'une solution d'acide nitrique, HNO_3 , acide fort et de nitrate de cuivre II par une solution de soude à $c_b = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$. La courbe de dosage est représentée ci-dessous.



4. En analysant la courbe de titrage, écrire les équations bilans des réactions qui ont lieu au cours de ce dosage, en justifiant l'ordre dans lequel ces réactions se déroulent. Calculer leur constante d'équilibre.
5. Calculer la concentration c_1 en acide nitrique et la concentration c_2 en ions cuivre II, Cu^{2+} , de la solution initiale.
6. Retrouver par le choix d'un point judicieux sur la courbe, la valeur du produit de solubilité de $\text{Cu}(\text{OH})_{2(s)}$.