

Problème n°3 : Action du vent sur le sable des dunes.

Dans les déserts de sable, le vent donne naissance à d'élégantes formations : les dunes. L'objet de cette partie est d'introduire quelques modèles simples caractérisant l'action mécanique du vent sur les grains de sable.



Photo 1 - Désert de Gobi

L'accélération de la pesanteur sera notée $\vec{g}$ et sa norme vaut $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Partie I – Déplacement d'un grain de sable par le vent.

On assimile un grain de sable à une sphère de rayon R de diamètre d au sein de l'air supposé être un fluide newtonien de viscosité dynamique η , de masse volumique ρ . Lorsque la sphère est en mouvement à la vitesse $\vec{V}$ par rapport à l'air, les frottements exercés par l'air sont modélisés par la force de trainée $\vec{F}_t$ de sens opposé au vecteur vitesse du grain.

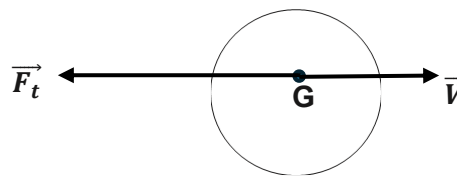


Figure 1 - Grain de sable dans un fluide

?

1. Rappeler l'expression de la norme de la force de trainée $\|\vec{F}_t\|$ exercée par l'air et appliquée au centre d'inertie G de la sphère en mouvement en fonction de V , R , ρ et du coefficient de trainée C_x .

Le coefficient de traînée C_x est fonction du nombre de Reynolds Re .

La courbe expérimentale $C_x = f(Re)$ est donnée **figure 2** en utilisant une échelle logarithmique, pour des nombres de Reynolds compris entre 0,1 et 10^5 .

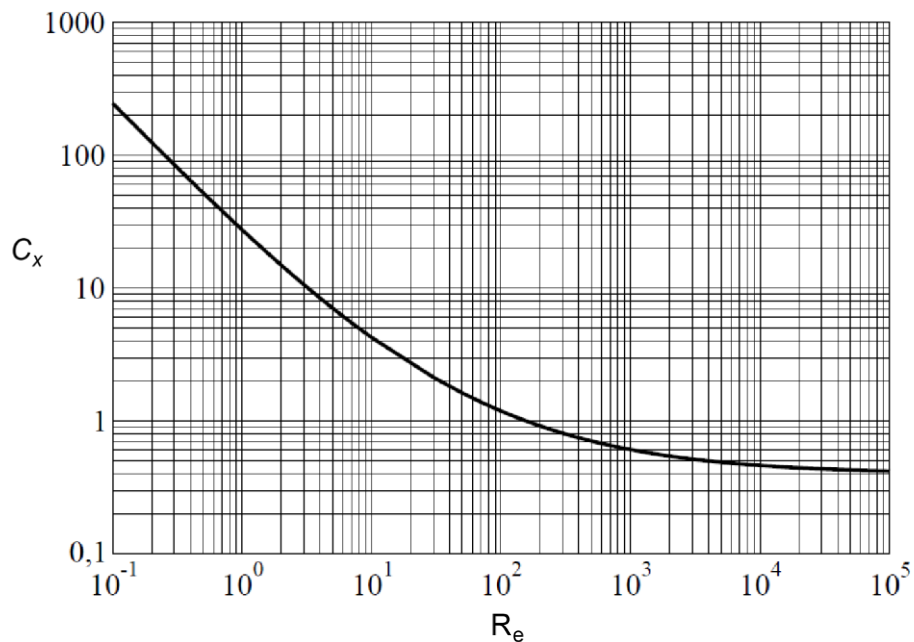


Figure 2 - Coefficient de traînée d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds sur une échelle log-log

2. Comment qualifie-t-on les régimes d'écoulement observés dans les cas asymptotiques $R_e \ll 1$ et $R_e \gg 1$?

3. Aux faibles nombres de Reynolds $R_e < 1$ la traînée obéit à la loi dite de Stokes dans laquelle la force a pour expression $\vec{F}_t = -6\pi\eta R\vec{V}$. Préciser alors l'expression de C_x en fonction de R_e , puis celle donnant $\log C_x$ en fonction de $\log R_e$. Cette dernière expression est-elle en accord avec le graphe de la **figure 2** aux faibles nombres de Reynolds ? Justifier par une application numérique appropriée en utilisant des points de la courbe de la **figure 2**.

4. En utilisant le graphique, déterminer l'expression approchée de la force de traînée dans le cas asymptotique $R_e > 10^4$.

La **photo 2** permet de visualiser les grains de la dune Cerro Bramador au Chili.

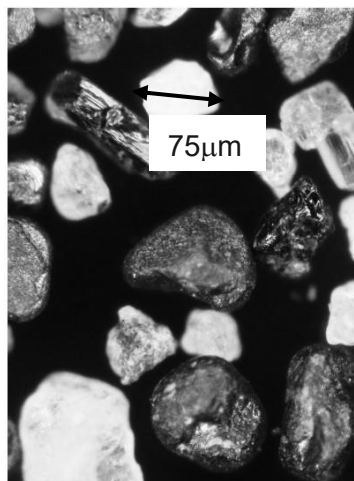


Photo 2 – Grains de la dune Cerro Bramador au Chili

Pour cette région du monde, on donne la viscosité dynamique et la masse volumique de l'air :

- $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}$
- $\rho = 1,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Soit un grain de sable très fin supposé sphérique de centre G , de diamètre $d = 75 \mu\text{m}$, de masse $m = 0,265 \mu\text{g}$ reposant sur une dune de sable en un point O pris comme origine du repère Oxz représenté sur la **figure 3** associé au référentiel terrestre galiléen. A l'instant $t = 0$ choisi comme origine des temps, une rafale de vent de très courte durée met le grain de sable en mouvement avec un vecteur vitesse initiale $\vec{V}_0$ incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale et de norme $V_0 = 2 \text{ km.h}^{-1}$. Le mouvement ultérieur du grain s'effectue ensuite dans l'air atmosphérique au repos dans le référentiel terrestre galiléen dans lequel sera étudié le mouvement. On supposera que dans ces conditions la force de trainée peut être modélisée par la formule de Stokes $\vec{F}_t = -6\pi\eta R\vec{V}$ où $\vec{V}$ est le vecteur vitesse du grain à l'instant t dans ce même référentiel.

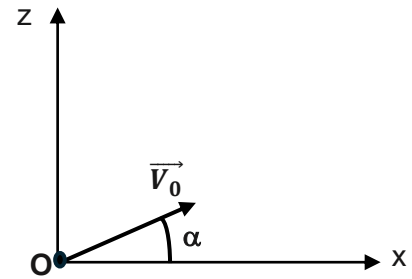


Figure 3 – Repère pour l'étude du mouvement

La poussée d'Archimède exercée par l'air sur le grain est négligeable dans cette étude.

5. Etablir les 2 équations différentielles vérifiées au cours du temps par les composantes $V_x(t)$ et $V_z(t)$ du vecteur vitesse du grain de sable.

6. Etablir les expressions de $V_x(t)$ puis de $x(t)$, abscisse de la position du grain et montrer qu'au bout d'un temps suffisamment grand la trajectoire du grain se confond avec la verticale d'équation $x = K$ (constante > 0). Exprimer la constante K en fonction de V_0 , α , m , R , η . Faire l'application numérique accompagnée de l'unité. Estimer la valeur numérique du temps t_l à partir duquel cette trajectoire verticale est atteinte.

7. Exprimer en fonction de m , g , R , η , et d'un vecteur unitaire approprié, le vecteur vitesse limite $\vec{V}_{lim}$ du grain de sable pour $t > t_l$. Calculer la valeur numérique de la norme $\|\vec{V}_{lim}\|$.

8. L'hypothèse de la formule de Stokes pour modéliser la force de trainée est-elle acceptable dans le cadre de cette étude ?

Partie II - Profil de vitesse au-dessus d'une dune

La force que subit un grain de sable est le résultat d'une interaction assez complexe entre l'air en mouvement et une zone située au-dessus du lit de sable que l'on appelle couche limite (**figure 4**).

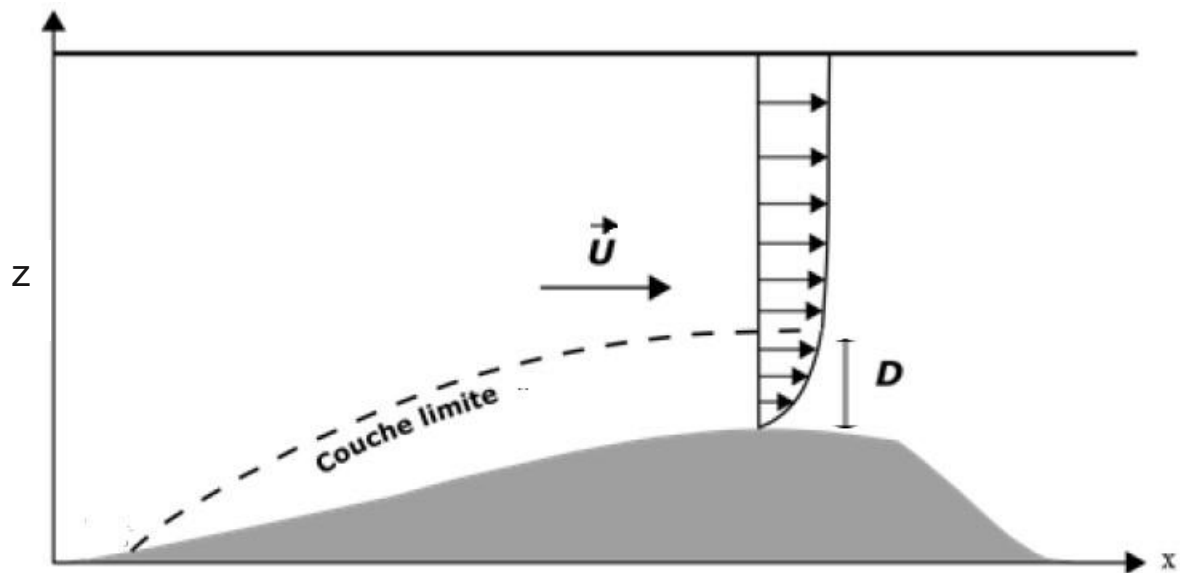


Figure 4 - Couche limite au-dessus des dunes avec le profil de vitesses (échelle non respectée)

On modélise l'écoulement de l'air dans la couche limite comme un écoulement laminaire de Couette plan entre deux plaques représentant la surface de la dune fixe et la surface libre de l'air à vitesse constante U du vent.

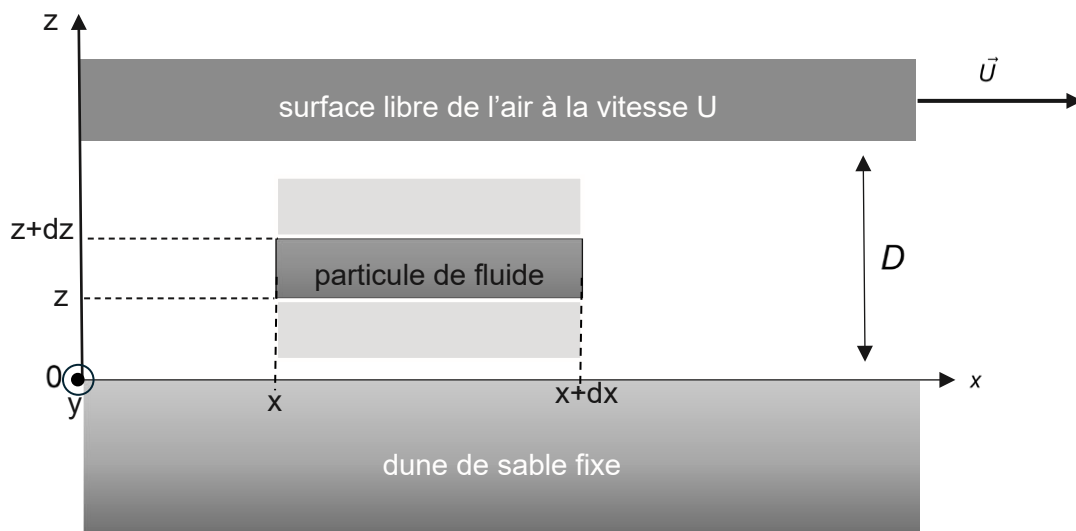


Figure 5 - Modélisation de l'écoulement de l'air dans la couche limite

On suppose qu'entre les deux plaques, l'écoulement de l'air est incompressible, stationnaire et invariant selon les axes Ox et Oy , c'est-à-dire que les champs de pression et de vitesse de l'air sont indépendants des coordonnées x et y et s'écrivent alors en un point M entre les deux plaques :

$$\vec{V}(M) = V(z) \cdot \vec{u}_x$$

$$P(M) = P(z)$$

Le système étudié est une particule de fluide de masse élémentaire δm de dimensions dx , dy et dz représentée **figure 5**.

9. Donner les expressions des forces élémentaires de viscosité $\delta \vec{F}_v(z)$ et $\delta \vec{F}_v(z + dz)$ exercées sur la face inférieure et sur la face supérieure de la particule d'air étudiée.

10. Faire un bilan des forces exercées sur la particule de fluide en se limitant à celles qui sont colinéaires à l'axe Ox du mouvement.

11. Montrer que la projection sur l'axe Ox du bilan de quantité de mouvement appliqué à la particule d'air, permet d'obtenir l'équation différentielle :

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = 0$$

12. En déduire l'expression du champ des vitesses $\vec{V}(z)$ dans la couche limite.

13. Sachant que l'épaisseur de la couche limite est de l'ordre du millimètre et que la vitesse U du vent dans le désert est d'une vingtaine de kilomètres par heure, justifier la valeur 2 km.h^{-1} prise dans les applications numériques de la **partie I-** pour la vitesse V_0 de l'air entraînant le grain posé sur une dune.

14. Représenter schématiquement le profil de vitesse dans la couche limite et commenter en rapport avec le profil réel de la **figure 4**.

15. Calculer la vitesse moyenne de l'air dans la couche limite et discuter de la validité de l'hypothèse d'écoulement laminaire dans le modèle.