

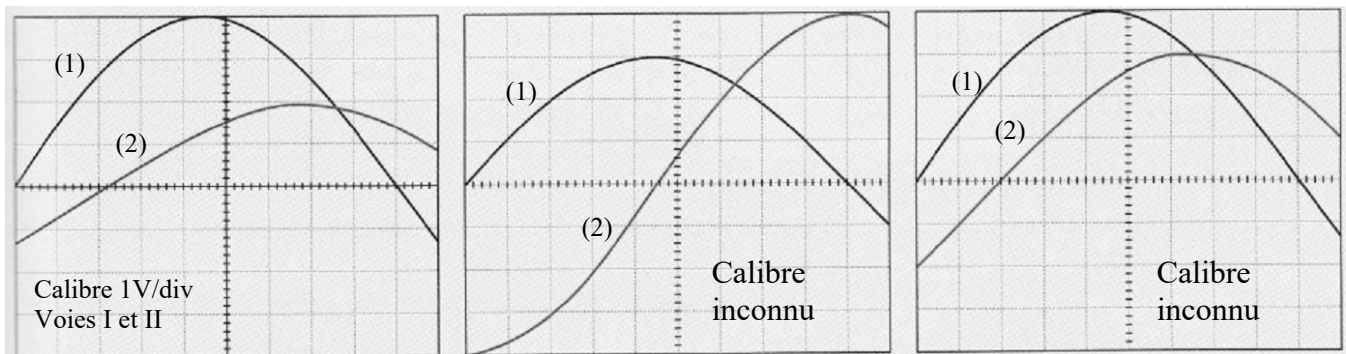
TD de physique n°2 : Filtres

Exercices n°1 – 2 – 3

Notions et contenus	Capacités exigibles
Spectre d'un signal périodique.	Analyser la décomposition d'un signal périodique fournie sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales. Identifier la valeur moyenne du signal dans le spectre d'un signal périodique.
Modèle de filtre passif d'ordre 1 : réponse du circuit RC à une excitation sinusoïdale.	Utiliser la notation complexe pour étudier le régime forcé.
Fonction de transfert harmonique, courbes de réponse en gain (module de la fonction de transfert) et en phase, fréquence de coupure, bande passante.	Tracer une courbe de réponse en gain ou en phase associée à une fonction de transfert harmonique du premier ordre. Exploiter une courbe de réponse en gain ou en phase associée à une fonction de transfert harmonique d'ordre quelconque. Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale, la fonction de transfert du filtre étant fournie, ou sa courbe de réponse (en gain et/ou en phase) étant fournie ou déterminée expérimentalement.

Exercice n°1

Les oscillogrammes ci-dessous représentent la tension d'entrée $u_e(t)$ sinusoïdale et la tension de sortie $u_s(t)$ pour trois types de filtres. La fonction de transfert associée à chaque filtre est donnée. Identifier $u_e(t)$ et $u_s(t)$ pour chacun des montages et déterminer le déphasage ϕ de u_s par rapport à u_e . Identifier la nature de chacun des filtres.



Filtre 1 :
$$\underline{H} = \frac{2}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

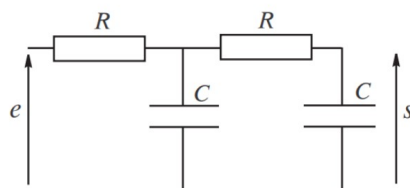
Filtre 2 :
$$\underline{H} = \frac{1}{(1 + jx)^2}$$

Filtre 3 :
$$\underline{H} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + j R_1 C \omega\right)}$$

avec $x = RC \omega$

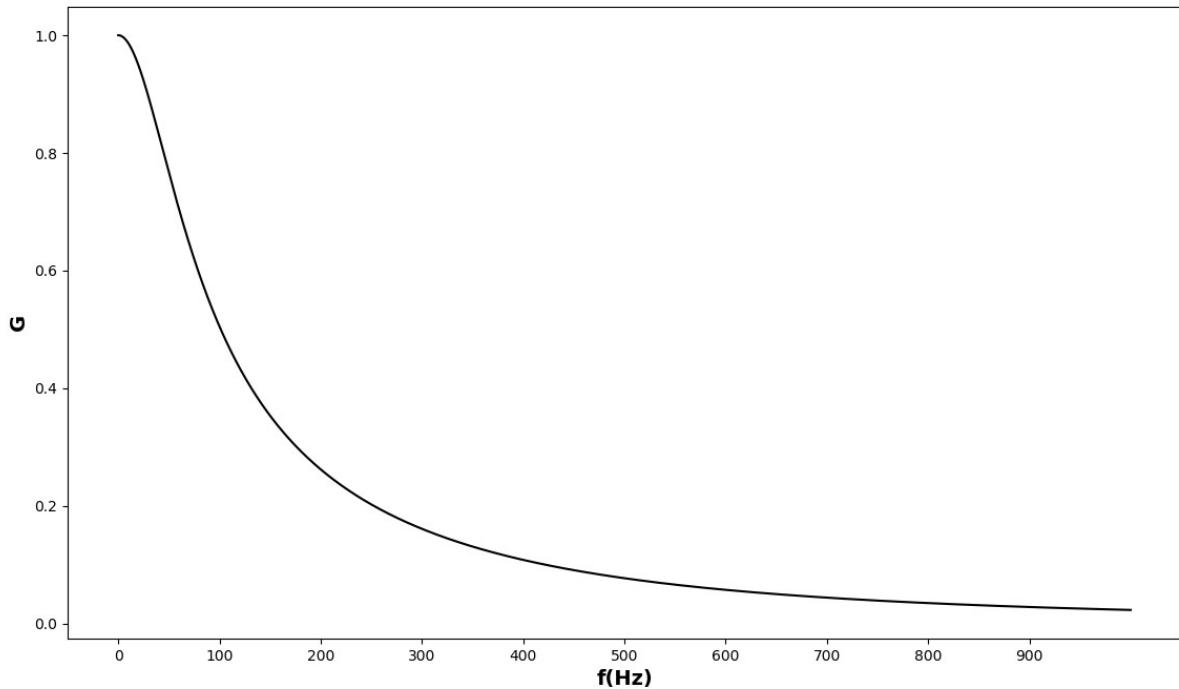
Exercice n°2 : étude d'un filtre passif d'ordre 2

On considère le filtre ci-contre :



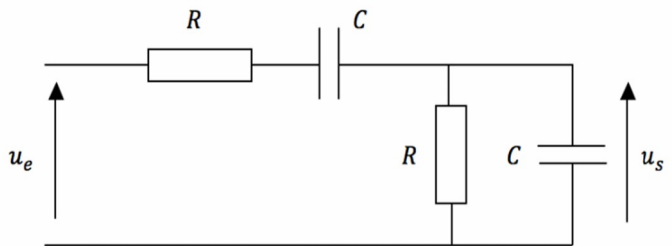
La fonction de transfert de ce filtre s'écrit : $H = \frac{s}{\omega} = \frac{1}{1 - R^2 C^2 \omega^2 + j 3 RC \omega}$

1. On introduit $x = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = 1/RC$. Donner les expressions du gain $G(x)$ et du déphasage $\varphi(x)$ pour ce filtre. Quelle est la nature du filtre ?
2. On donne ci-dessous la courbe du gain en fonction de ω pour $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 1,0 \text{ }\mu\text{F}$. Déterminer graphiquement la pulsation de coupure ainsi que la bande-passante en pulsations de ce filtre.
3. Retrouver le résultat par le calcul.



Exercice n°3 : Filtre de Wien

On étudie le filtre ci-contre, où les deux résistances R sont identiques, ainsi que les capacités C des deux condensateurs.



- 1) Déterminer, en régime sinusoïdal forcé, la fonction de transfert de ce filtre et la mettre sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{A}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

en précisant les valeurs de A , de Q et l'expression de ω_0 en fonction de R et de C .

- 2) Donner les expressions de $G(x)$: gain du filtre et de $\varphi(x)$: déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée, en utilisant comme variable la coordonnée réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Après avoir fait une étude asymptotique de cette fonction de transfert, tracer $G(x)$ et $\varphi(x)$. Comment mesure-t-on ces grandeurs avec un oscilloscope ? On précisera les branchements à effectuer. Pourquoi le courant de sortie i_s peut-il être considéré comme nul dans cette étude ?

3) Calculer ω_0 pour $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,5 \text{ }\mu\text{F}$.

Le filtre est alimenté par le signal d'entrée $u_e(t) = E_m \cos(\omega t) + E_m \cos(10\omega t) + E_m \cos(100\omega t)$ avec $\omega = 2,0 \cdot 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$.

Calculer les amplitudes et les phases de chacune des harmoniques présentes dans le signal de sortie puis écrire la décomposition en harmoniques du signal de sortie $u_s(t)$ en fonction de E_m , ω et t .

Quelle sera approximativement l'allure du signal de sortie $u_s(t)$?

4) Déterminer les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 et la bande passante $\Delta\omega$ du filtre en fonction de R et C puis de Q et ω_0 .

5) Circuit en régime quelconque :

Le filtre est à présent alimenté par une tension d'entrée quelconque, dont la valeur instantanée est $v_e(t)$. Déduire l'équation différentielle liant $v_s(t)$ et $v_e(t)$ en utilisant uniquement la fonction de transfert établie à la question 1). Que devient cette équation si la tension d'entrée est un échelon de tension E constant ?

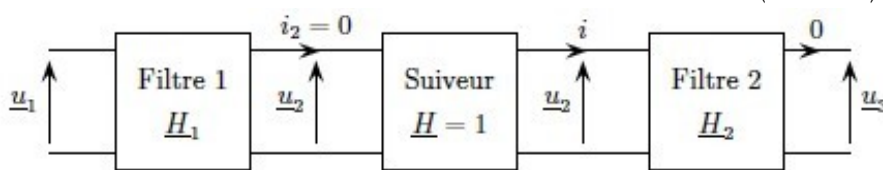
(Rép. : 1) $A = 1/3$; $Q = 1/3$; $\omega_0 = 1/RC$; 2) $G(x) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$; $\phi(x) = -\arctan\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3x}\right)$; 3) $\omega_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$;

$$v_s(t) = 0,0967 E_m \cos(\omega t + 1,28) + \frac{E_m}{3} \cos(10\omega t) + 0,0967 E_m \cos(100\omega t - 1,28) \approx \frac{E_m}{3} \cos(10\omega t) \Rightarrow \text{sinusoïde}$$

5) $\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{R^2 C^2} u_s = \frac{1}{RC} \frac{du_e}{dt}$

Exercice n°4 : Filtres en cascade

On considère l'association ci-dessous de deux filtres tels que : $H_1 = H_2 = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$



1. Quelle est la nature du filtre 1 ? Quel est son ordre ?
2. Donner un montage électrique simple permettant de réaliser ce filtre.
3. Quel est l'intérêt du montage suiveur ?
4. Donner l'expression de la fonction de transfert globale : $H = \frac{u_3}{u_1}$.
5. On injecte en entrée du montage un signal u_1 de la forme : $u_1(t) = U + U_{em} \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(3\omega_0 t)$ où $U = 5\text{V}$ et $U_{em} = 6\text{V}$.
 - a. Montrer que ce signal peut s'écrire en utilisant une somme de cosinus.
 - b. Représenter l'allure du spectre de ce signal.
 - c. Déterminer le spectre en amplitude du signal de sortie u_3 (on déterminera notamment l'amplitude des différentes harmoniques).

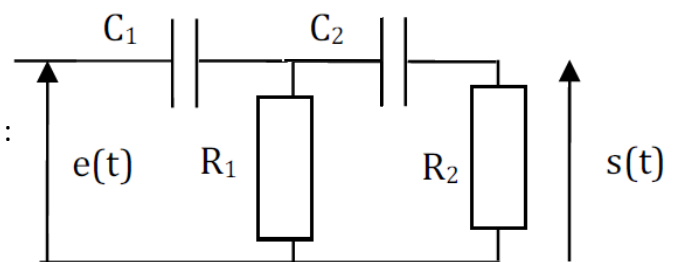
Rappel : $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$

(Rép. : 4. $H = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$; 5.a. $u_1(t) = U + \frac{U_{em}}{2} \cos(2\omega_0 t) + \frac{U_{em}}{2} \cos(4\omega_0 t)$;

5.c) $u_3(t) \geq U = 5 \text{ V}$; amp. $\cdot \frac{U_{em}}{10}$ pour $\omega = 2\omega_0$; amp. $\cdot \frac{U_{em}}{34}$ pour $\omega = 4\omega_0$.)

Exercice n°5 : Filtre du second ordre.

On considère le filtre passif du second ordre suivant :



1. Déterminer la nature de ce filtre en étudiant son comportement asymptotique
2. Prédire l'influence des défauts suivants (non simultanés) sur la nature du filtre et exprimer la bande-passante pour chacun des cas :
 - a. Claquage du condensateur C_1 claque (coupe-circuit)
 - b. Le condensateur C_2 est court-circuité
 - c. Claquage de la résistance R_1 claque (coupe-circuit)
 - d. La résistance R_2 est court-circuitée

(Rép. : 1. Passe haut ; 2. a) $s(t) = 0 \quad \forall \omega$; b) passe haut avec $f_c = \frac{R_1 + R_2}{2\pi R_1 R_2 C_1}$; c) passe haut avec $f_c = \frac{C_1 + C_2}{2\pi R_2 C_1 C_2}$; d) $s(t) = 0 \quad \forall \omega$.)