

Chapitre PHYS2 : Filtrage linéaire d'un signal

Plan du chapitre :

I. Spectre d'un signal périodique

1. Décomposition en série de Fourier
2. Spectre d'un signal périodique
3. Reconstitution d'un signal

II. Filtrage linéaire d'un signal périodique non sinusoïdal

1. Description d'un filtre
2. Différents types de filtres

III. Filtres d'ordre 1

1. RC passe bas
2. RC passe haut

IV. Filtre d'ordre 2 : exemple du filtre de Wien

1. Exploitation d'une courbe de réponse en gain ou en déphasage
2. Étude théorique du filtre de Wien

Capacités exigibles :

1. Analyser la décomposition d'un signal périodique fournie sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales.
2. Identifier la valeur moyenne du signal dans le spectre d'un signal périodique.
3. Utiliser la notation complexe pour étudier le régime forcé.
4. Tracer une courbe de réponse en gain ou en phase associée à une fonction de transfert harmonique du premier ordre.
5. Exploiter une courbe de réponse en gain ou en phase associée à une fonction de transfert harmonique d'ordre quelconque.
6. Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale, la fonction de transfert du filtre étant fournie, ou sa courbe de réponse (en gain et/ou en phase) étant fournie ou déterminée expérimentalement (cf TP).

Documents de cours

Document n°1 : Décomposition en série de Fourier

Soit un signal périodique $s(t)$ de période $T = \frac{1}{f}$. Sa décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(2\pi n f t + \phi_n) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

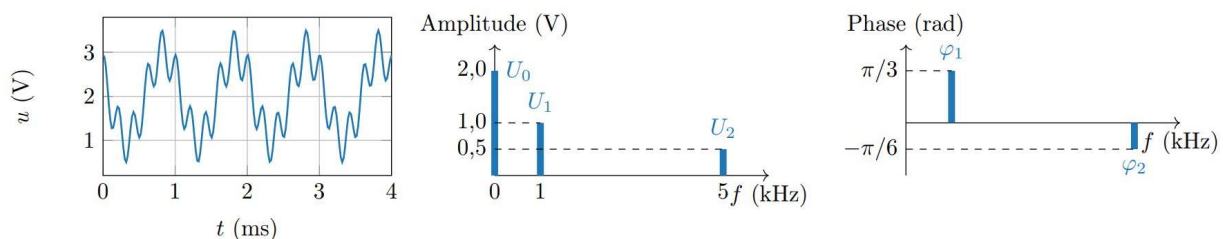
- S_0 est la **valeur moyenne** du signal périodique $s(t)$ ou composante continue ou fond continu. C'est la **composante de fréquence nulle**.
- La **composante sinusoïdale de fréquence** $f_n = n f$ (ou de pulsation $n\omega$) est appelée **harmonique de rang n**.
- S_n est l'amplitude de l'harmonique de rang n.
- ϕ_n est la phase à l'origine de l'harmonique de rang n.
- La fréquence $f = f_1 = \frac{1}{T}$ est la fréquence fondamentale du signal périodique. C'est la fréquence de l'harmonique de rang 1 ou harmonique fondamentale.

Document n°2 : Spectre d'un signal périodique

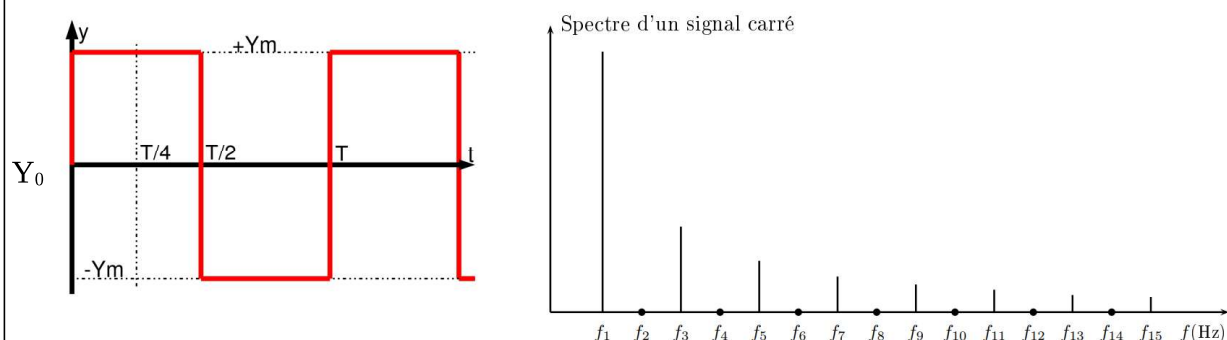
La figure suivante donne l'allure et le spectre de la tension $u(t)$ suivante :

$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + U_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

avec $f_1 = 1 \text{ kHz}$, $f_2 = 5 \text{ kHz}$, $U_0 = 2 \text{ V}$, $U_1 = 1 \text{ V}$, $U_2 = 0,5 \text{ V}$, $\phi_1 = \pi/3$ et $\phi_2 = -\pi/6$.



Document n°3 : Reconstitution d'un signal carré



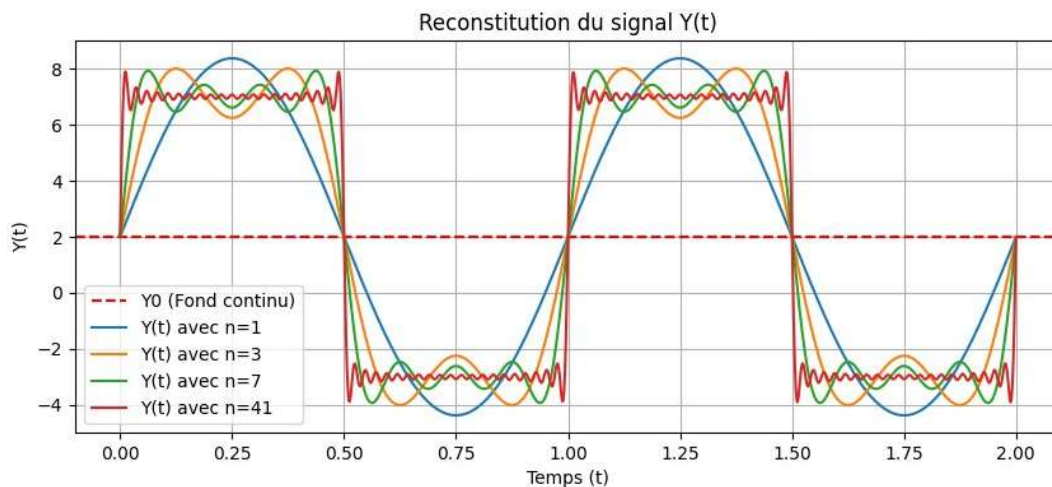
Un signal carré ne comporte, en plus du fond continu, que des harmoniques impaires de rang $n = 2k + 1$. L'amplitude de ces harmoniques décroît en $1/n$.

Décomposition en série de Fourier :

$$Y(t) = Y_0 + \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\omega t]}{2k+1} = \frac{4A}{\pi} \left[\frac{\sin(\omega t)}{1} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \frac{\sin(7\omega t)}{7} + \dots \right]$$

A partir de cette décomposition, on peut reconstituer le signal carré en ajoutant de plus en plus d'harmoniques.

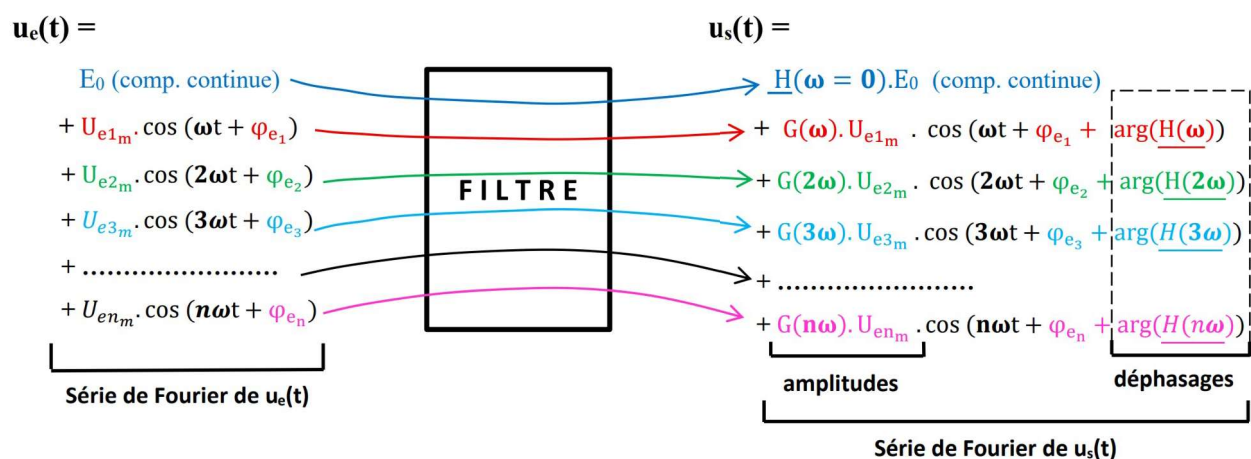
Sur le schéma ci-dessous, n correspond au rang de la dernière harmonique ajoutée :



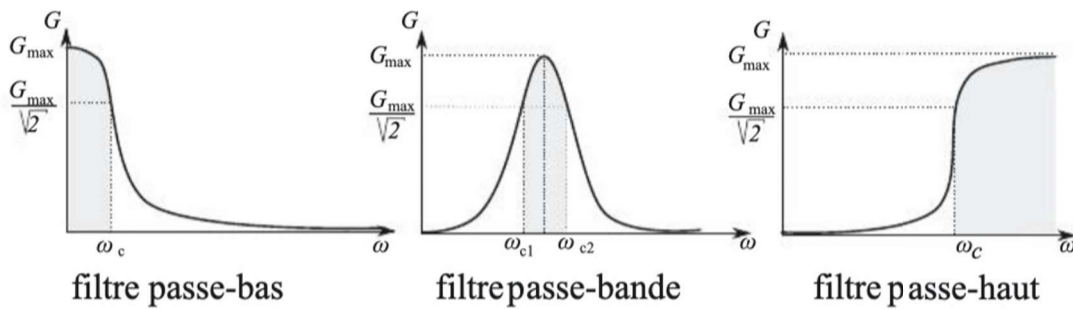
Document n°4 : Filtre – Définitions

- Un **filtre** est un système dont le signal de sortie $s(t)$ (réponse) est différent du signal d'entrée $e(t)$ (excitation).
- Soit e_1 et e_2 deux entrées du filtre. Ce filtre modifie ces entrées et donne deux sorties : s_1 et s_2 respectivement.
On dit alors que le filtre est **linéaire** si il donne de l'entrée $\lambda e_1 + \mu e_2$, la sortie $\lambda s_1 + \mu s_2$, quelles que soient les valeurs réelles de λ et μ . En pratique, les filtres constitués de dipôles linéaires (comme la résistance et le condensateur) sont linéaires.
- Conséquence importante : Lorsqu'un filtre linéaire est soumis à une entrée égale à une somme de signaux sinusoïdaux, sa réponse est la somme des réponses du filtre à chaque signal sinusoïdal.**
- L'étude du comportement d'un filtre linéaire en fonction de la pulsation ω d'un signal d'entrée sinusoïdal permet donc d'étudier le comportement de ce filtre pour tout signal périodique grâce à sa décomposition en série de Fourier.

Document n°5 : Principe d'un filtre



Document n°6 : Différents types de filtres



Exercices d'application

Exercice d'application n°1

On donne le spectre en amplitude en fonction de la pulsation ω de 3 signaux périodiques :



A_n est l'amplitude de l'harmonique de rang n .

1. Attribuer à chaque spectre l'équation du signal correspondante :
 $e(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ ou $e(t) = A_0$ ou $e(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$?
2. Représenter l'allure de $e(t)$ pour chaque spectre avec $\varphi_1 = 0$

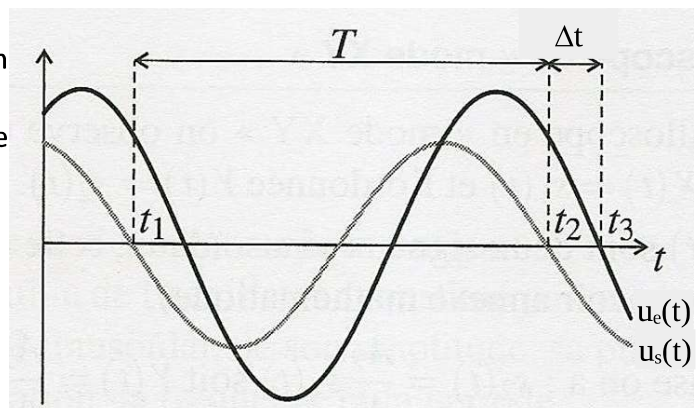
Un signal triangulaire n'est composé que d'harmoniques impaires. L'amplitude A_n de chaque composante décroît en $1/n^2$, où n est le rang de l'harmonique ($A_n = A_1/n^2$).

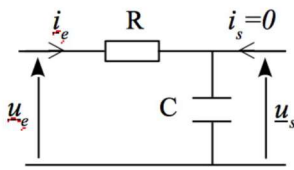
3. Représenter l'allure du spectre en amplitude d'un signal triangulaire de fond continu nul.

Exercice d'application n°2 : Mesure du gain et du déphasage à l'oscilloscope

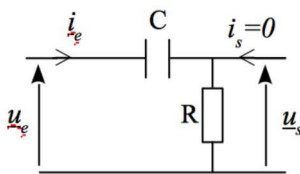
On visualise à l'oscilloscope les tensions en entrée et en sortie d'un filtre donné.
 On suppose que le calibre vertical est le même pour les deux tensions.

Exprimer le gain et le déphasage de ce filtre.

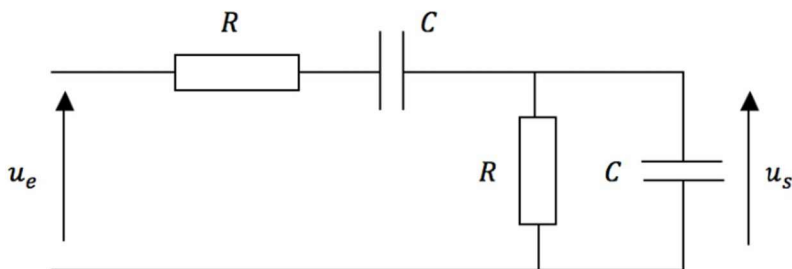


Exercice d'application n°3 : Étude d'un filtre d'ordre 1, le RC

1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre. On pourra introduire une pulsation caractéristique ω_0 dont on précisera l'expression.
2. Déterminer ensuite l'expression du gain $G(\omega)$ et du déphasage $\phi(\omega)$ puis tracer leur allure. On pourra commencer par faire une étude asymptotique de ces fonctions à hautes et basses fréquences. En déduire la nature de ce filtre.
3. Calculer la pulsation de coupure et donner la bande passante de ce filtre.
4. Montrer que ce filtre possède un caractère intégrateur à haute fréquence.

Exercice d'application n°4 : Étude d'un filtre d'ordre 1, le CR

1. Reprendre l'étude précédente sur ce nouveau filtre (fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$, tracé du gain $G(\omega)$ et du déphasage $\phi(\omega)$) et en déduire sa nature.
2. Calculer la pulsation de coupure et donner la bande passante de ce filtre.
3. Montrer que ce filtre possède un caractère dérivateur à basse fréquence.

Exercice d'application n°5 : Étude d'un filtre d'ordre 2, le filtre de Wien

$$R = 100 \, \Omega$$

$$C = 1,0 \, \mu\text{F}$$

La fonction de transfert a pour expression : $\underline{H}(jx) = \frac{x}{3x + j(x^2 - 1)}$ avec $x = RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0}$

Remarque : le filtre est d'ordre 2 car la fonction de transfert comporte un polynôme du 2d degré au dénominateur.

Montrer que les courbes de réponse en gain et en phase ci-dessous sont cohérentes avec la fonction de transfert fournie (gain, type de filtre, gain maximum, bande passante, déphasage).

