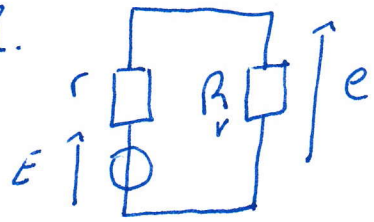
Devoir surveillé n°1

BCPST2
2026-2027

Corrigé

Problème : modélisation d'un pH-mètre

1.



Formule du pont diviseur de tension :

$$e = E\,\frac{R_v}{R_v + r}$$

AN : $e = 0{,}20 \times \dfrac{10^6}{10^6 + 10 \cdot 10^6} = 0{,}20 \times \dfrac{1}{11}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{e \simeq 0{,}18\ \text{mV}}}$$

2. Pour avoir une erreur inférieure à 10% : $\dfrac{E - e}{E} < 0{,}1$

$$\Rightarrow 1 - \frac{e}{E} < 0{,}1 \overset{\text{quest}^\circ 1}{\Rightarrow} 1 - \frac{R_v}{R_v + r} < 0{,}1 \Rightarrow \frac{r}{R_v + r} < 0{,}1$$

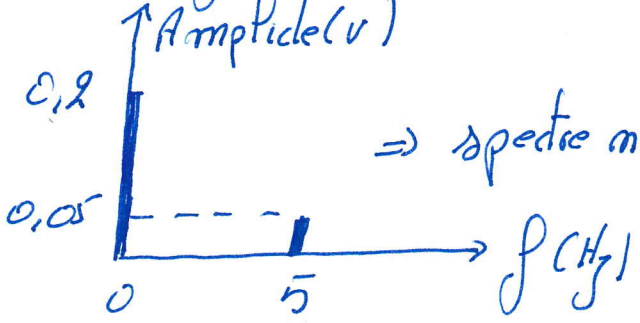
$$\Rightarrow R_v > \frac{r}{0{,}1} - r$$

AN : $R_v > \dfrac{10}{0{,}1} - 10 \Rightarrow \underline{\underline{R_v > 90\ \text{T}\Omega}}$

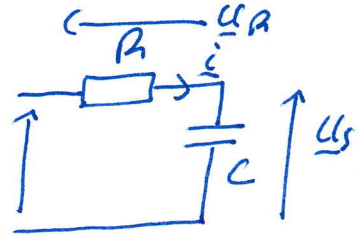
3. Le signal $E(t)$ de la figure 3 est un signal sinusoïdal

- de période $T = 0{,}2\,s \Rightarrow f = 5\,\text{Hz}$
- d'amplitude 0,05V
- de valeur moyenne : 0,2V

$\Rightarrow$ représentat° fréquentielle



$\Rightarrow$ spectre n°2

4. 

Loi des mailles : $\underline{u}_e = \underline{u}_R + \underline{u}_s$

$\underline{u}_R = R\underline{i}$ $\quad \underline{i} = C\frac{d\underline{u}_s}{dt} = jC\omega\underline{u}_s$

$\Rightarrow \underline{u}_e = R\underline{i} + \underline{u}_s = jRC\omega\underline{u}_s + \underline{u}_s = \underline{u}_s(1+jRC\omega)$

$\Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1+jRC\omega} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $\begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_0 = \frac{1}{RC} \end{cases}$

5. $\underline{H} = \frac{1}{1+jx} \Rightarrow G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\lim_{x\to 0} G = 1$

$\lim_{x\to +\infty} G = 0$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ filtre passe bas

6. Soit ω_c la pulsation de coupure

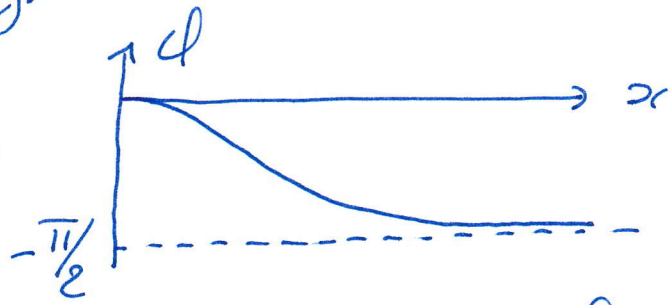
$G(\omega=\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1+\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = 2$

$\Rightarrow \underline{\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}}$

7. $\varphi = \arg \underline{H} = \arg \frac{1}{1+jx} = -\arg(1+jx) = -\arctan x$

$\lim_{x\to 0} \varphi = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \varphi = -\pi/2$

$\Rightarrow$ 

8. D'après l'énoncé on souhaite ne conserver que la composante continue A_1 du signal $E(t)$, puisque c'est cette composante continue qui dépend du pH.
D'après le spectre 2 il faut donc utiliser un filtre passe bas de fréquence de coupure $f_c < 5\,Hz$

9. • $f_0 = 0\,Hz$: $G(f_0=0) = \frac{A_1'}{A_1} \Rightarrow \frac{A_1'}{A_1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{A_1' = A_1}}$

(↑ question 6)

• $f_1 = 5\,Hz = \frac{\omega_1}{2\pi}$: $G(f_1=5) = \frac{A_2'}{A_2}$ (↓) $\Rightarrow \frac{A_2'}{A_2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}}$

$$\Rightarrow A_2' = A_2 \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}}$$

• $\varphi(x) = -\arctan x \Rightarrow \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

Pour $\omega_1 = 2\pi f_1$ ($f_1 = 5Hz$) : $\varphi(\omega_1) = \psi_s + \omega_1 t - \omega_1 t = \psi_s$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\psi_s = -\arctan\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)}}$$

AN $\omega_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{10^3 \times 300 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{3\cdot 10^{-1}} = 3{,}3\ rad.s^{-1}$

$\omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow \omega_1 = 2 \cdot \pi \times 5 \simeq 31\ rad.s^{-1}$

$$\Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_0} \simeq 10$$

D'où $A_1' = A_1 = 0{,}2\,V$

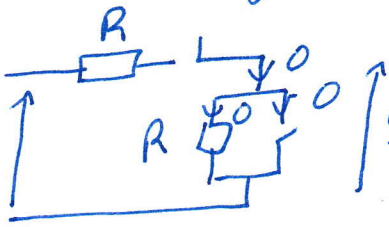
$A_2' = A_2 \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}} \Rightarrow A_2' = 0{,}05\,\frac{1}{\sqrt{1+10^2}} \simeq 0{,}005\,V$

$\psi_s = -\arctan\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) \Rightarrow \psi_s \simeq -\arctan(10) \simeq 1{,}5\ rad.$

10. Le filtre réalise un filtrage efficace en divisant par 10 l'amplitude du signal sinusoïdal que l'on souhaite éliminer.

1.1 Etude du filtre A

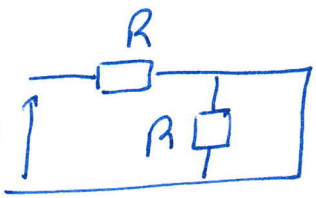
BF



$\underline{u}$

$\underline{u_s} = R \times 0 = 0$ coupant

HF



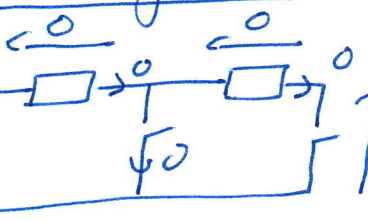
$\underline{u}$

$\underline{u_s} = 0$ coupant

⇒ filtre passe bande
⇒ ne convient pas

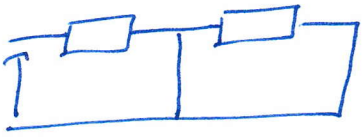
Etude du filtre B

BF



$\underline{u_e}$

$\underline{u_s} = \underline{u_e}$ passant



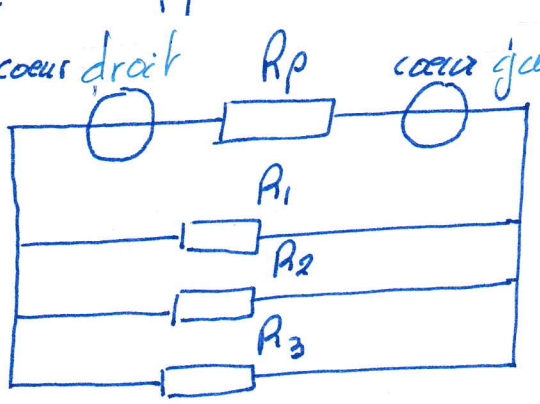
$\underline{u_e}$

$\underline{u_s} = 0$ coupant

⇒ filtre pas bas
⇒ le filtre B convient.

Problème : l'appareil cardiovasculaire

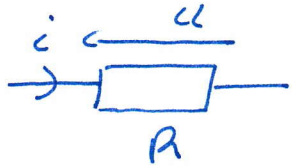
1)



2) Les résistances R_1, R_2 et R_3 sont associées en parallèle

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{sys}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{sys} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3}$$

3)



Loi d'Ohm : $u = Ri$

$\Leftrightarrow$ $R \longleftrightarrow R_{sys}$

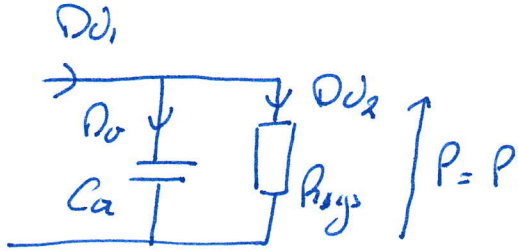
$i \longleftrightarrow D_v$

$u \longleftrightarrow P_a - P_v$.

4) Le débit volumique étant l'analogue d'une intensité, on peut écrire une loi des noeuds : $D_{v_1} = D_v + D_{v_2} \Rightarrow D_v = \frac{dV}{dt} = D_{v_1} - D_{v_2}$.

5) Le débit volumique D_{v_1} se divise au niveau d'un noeud entre la chambre élastique, modélisée par un condensateur et la résistance systémique $\Rightarrow$ le circuit modèle est donc le circuit 1.

6)



- Loi des noeuds : $D_{v_1} = D_v + D_{v_2}$ (1)
- "Loi d'Ohm" : $P^* - P_v = P = R_{sys} D_{v_2}$ (2)
- "Condensateur" : $D_v = C_a \frac{d(P^* - P_v)}{dt}$

$= C_a \frac{dP}{dt}$ (3)

(1) $\Rightarrow D_{v_1} = C_a \frac{dP}{dt} + \frac{P}{R_{sys}} \Rightarrow R_{sys} C_a \frac{dP}{dt} + P = R_{sys} D_{v_1}$

7) Les termes $R_{sys} C_a \frac{dP}{dt}$ et P de l'équation précédente doivent être de même dimension. $\Rightarrow R_{sys} C_a = \tau$ est donc homogène à un temps.

8) $P(t) = A e^{-t/\tau} + R_{sys} D_{v_1}$

sol° éq° homogène ↓ ↳ solution particulière.

(CI) $P(t=0) = P_1 = A + R_{sys} D_{v_1} \Rightarrow A = P_1 - R_{sys} D_{v_1}$

$\Rightarrow P(t) = (P_1 - R_{sys} D_{v_1}) e^{-t/\tau} + R_{sys} D_{v_1}$.

9) $P_0 = P(t = t_0) \Rightarrow P_0 = (P_1 - R_{sys} D_{v_1}) e^{-t_0/\tau} + R_{sys} D_{v_1}$.

10) Dans la phase diastolique la valve aortique (clapet) est fermée
$\Rightarrow D_v = 0$
L'équation différentielle s'écrit donc : $\tau \frac{dP}{dt} + P = 0$

$P(t) = A' e^{-t/\tau}$ (origine des temps à la fermeture du clapet)

(CI) $P(t=0) = P_0 = A' \Rightarrow P(t) = P_0 e^{-t/\tau}$

11) <u>Phase 1</u> : augmentation de P dans le modèle de Windkessel
$\Rightarrow$ phase systolique.

<u>Phase 2</u> : diminution de P dans le modèle de Windkessel
$\Rightarrow$ phase diastolique.

Les enregistrements physiologiques montrent un écart avec le modèle de Windkessel dans l'évolution de P lors de la phase systolique. Cet écart peut venir de la modélisation $D_{v_1} = cte$ durant cette phase, ce qui n'est visiblement pas le cas.