Semaine du lundi 23 novembre au vendredi 27 novembre 2026
Semaine 9

Algèbre : Espaces vectoriels

— Structure d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Règles de calcul. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
— Sous-espaces vectoriels. Intersection de deux sous-espaces vectoriels.
— Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.
— Famille finie de vecteurs : génératrice, libre, liée, base.
— Une famille finie de polynômes non nuls de degrés distincts deux à deux est libre.
— Espaces vectoriels de dimension finie.
— Propriétés des familles de vecteurs en dimension finie : caractérisation d'une base dans un espace vectoriel de dimension finie par son cardinal et son caractère générateur ou libre.
— Rang d'une famille finie de vecteurs : définition, méthode de calcul.

Applications linéaires

— Définition. Noyau, image, propriétés.
— Caractérisation de f injective, f surjective, f bijective, f inversible.
— Opérations sur les applications linéaires ($+$, $.$, $\circ$, application réciproque), propriétés.

Questions de cours : énoncé et démonstration :

1. Si la famille $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est liée, alors au moins un des vecteurs de la famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n non nulle et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E : Si card($\mathcal{F}$)=n et $\mathcal{F}$ est une famille libre alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
3. Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (X_1, X_2, ...X_p)$ une famille de p vecteurs de E. $\text{rg}(X_1, X_2, ...X_p) = p \Leftrightarrow (X_1, X_2, ...X_p)$ est une famille libre.
4. Soit f une application linéaire de E dans F : f est injective si et seulement si $\ker f = \{O_E\}$.