Les outils.

29 mars 2024

Table des matières

1

Vocabulaire de la logique et des ensembles.

1.1 Logique élémentaire.

1.1.1 Définition : Négation, et/ou

Soient P et Q deux propositions, on définit de nouvelles propositions

- la proposition (NON P) qui est vraie si P est fausse et fausse sinon.
- la proposition (P ou Q) qui est vraie lorsqu'au moins une des deux propositions est vraie, et fausse sinon.
- la proposition (P et Q) qui est vraie lorsque P et Q sont vraies, et fausse sinon.

Remarques :
- Vrai et Faux les deux "valeurs de vérités".
- On dit que P équivaut à Q quand ils ont même valeur de vérité.
- Le 'ou' est inclusif.

Propriétés.

$$(P \text{ et Vrai}) \text{ équivaut à } P \qquad (P \text{ ou Vrai}) \text{ équivaut à Vrai}$$

$$(P \text{ et Faux}) \text{ équivaut à Faux} \qquad (P \text{ ou Faux}) \text{ équivaut à } P$$

$$(P \text{ et } P) \text{ équivaut à } P \qquad (P \text{ ou } P) \text{ équivaut à } P$$

$$(P \text{ et } Q) \text{ équivaut à } (Q \text{ et } P) \qquad (P \text{ ou } Q) \text{ équivaut à } (Q \text{ ou } P)$$

$$P \text{ et } (Q \text{ et } R) \text{ équivaut à } (P \text{ et } Q) \text{ et } R \qquad P \text{ ou } (Q \text{ ou } R) \text{ équivaut à } (P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$$

Remarque : Quand il n'y a que des "et" ou que des "ou", on peut enlever les parenthèses.

1.1.2 (Négation du "et" et du "ou")

$$Non(P \text{ et } Q) \quad \text{équivaut à} \quad Non(P) \text{ ou } Non(Q)$$

$$Non(P \text{ ou } Q) \quad \text{équivaut à} \quad Non(P) \text{ et } Non(Q)$$

Remarque : La négation d'un "et" est un "ou" ; La négation d'un "ou" est un "et".

1.1.3 Distributivité du "et" sur le "ou" et du "ou" sur le "et"

$$P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \text{ équivaut à } (P \text{ et } Q\ ) \text{ ou } (P \text{ et } R\ )$$

$$P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \text{ équivaut à } (P \text{ ou } Q\ ) \text{ et } (P \text{ ou } R\ )$$

Remarque : Faire bien attention à l'usage des parenthèses quand il y a des "et" et des "ou".

1.1.4 Implication et équivalence.

On note $P \implies Q$ la proposition (P et Q) ou ($Non(P)$). (ou plus simplement $Non(P)$ ou Q)

On note $P \iff Q$ la proposition (P et Q) ou ($Non(P)$ et $Non(Q)$)

$\boxed{P \implies Q}$: "**Si** P (*vraie*) **alors** Q (*vraie*)"

$$\underset{\text{suffisante}}{P} \implies \underset{\text{nécessaire}}{Q}$$

Transitivité.

$$\boxed{P \implies Q \text{ et } Q \implies R \quad \text{entraîne} \quad P \implies R}$$

$\boxed{P \iff Q}$: " P (*vraie*) **si, et seulement si,** Q (*vraie*)"

$$P \iff Q \text{ équivaut à } (\ P \implies Q \text{ et } Q \implies P\ )$$

Q est une condition à la fois nécessaire et suffisante pour que P soit vraie.

Transitivité.

$$\boxed{P \iff Q \text{ et } Q \iff R \quad \text{entraîne} \quad P \iff R}$$

Implication / déduction.

On distingue : une implication que l'on peut voir comme une règle
et une déduction qui est l'application de la règle.

Exemple (*dans un contexte où α est un réel supérieur ou égal -1*) :

déduction

on sait que $-\alpha = \sqrt{\alpha+1}$ $\boxed{\text{donc}}$ $\alpha^2 = \alpha + 1$

$\uparrow$

$\boxed{\textbf{\textit{Pour tout }} (a,b) \in \mathbb{R}^2\textbf{\textit{, si }} a = b \textbf{\textit{ alors }} a^2 = b^2}$

En pratique les implications sont associées à un quantificateur universel avec P et Q dépendant d'une variable.

$$\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$$

1.1.5 Implication réciproque

L'implication réciproque de l'implication $\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$ est :

$$\forall x \in E, \quad Q(x) \Longrightarrow P(x)$$

Remarque : Une implication et sa réciproque n'ont pas toujours la même valeur de vérité.

1.1.6 Contraposée

La forme contraposée de l'implication $\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$ est :

$$\forall x \in E, \quad non(Q(x)) \Longrightarrow non(P(x))$$

Remarques :

- Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité (*elles sont équivalentes*).
- Les propositions : $\forall x \in E,\ P(x) \iff Q(x)$ et $\forall x \in E,\ Non(P(x)) \iff Non(Q(x))$ sont équivalentes.

1.1.7 Négation d'une implication.

La négation de l'implication $\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$ est :
$$\exists x \in E : \; P(x) \text{ et } Non(Q(x)).$$

Remarques :

La négation d'une implication est un "et", elle ne s'exprime pas avec une implication.

La valeur de x qui permet de montrer qu'une implication est fausse, est appelée **contre-exemple**.

1.2 Quantificateurs universel et existentiel :

1.2.1 Définitions

$P(x)$ désigne une proposition dépendant d'une variable x élément un ensemble E :

❶ $\forall x \in E, \quad P(x)$ signifie que : pour chaque x élément de E la proposition $P(x)$ est vraie.

❷ $\exists\, x \in E : \; P(x)$ signifie que : il existe au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie

❸ $\exists! x \in E : \; P(x)$ signifie que : il existe un unique x de E pour lequel $P(x)$ est vraie

On peut décomposer ❸ :
$$\underbrace{(\exists x \in E : \quad P(x))}_{\text{existence}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\forall (x_1, x_2) \in E^2, \; (P(x_1) \text{ et } P(x_2)) \Longrightarrow x_1 = x_2}_{\text{unicité}}$$

1.2.2 Négation de proposition avec des quantificateurs

$$Non[\forall x \in E\,, \; P(x)] \; \text{ équivaut à } \; \exists x \in E : \; Non[P(x)]$$

$$Non[\exists x \in E : \; P(x)] \; \text{ équivaut à } \; \forall x \in E\,, \; Non[P(x)]$$

Notion de contre-exemple :
Pour démontrer que la proposition $[\forall x \in E\,, \; P(x)]$ est fausse, il suffit de trouver un élément x de E pour lequel $P(x)$ est faux.

1.2.3 Chaines de quantificateurs

• Les quantificateurs, s'écrivent toujours à gauche des propositions,

• On enlève les parenthèses quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple :

$$\text{La proposition } \; \forall x \in E, \underbrace{(\exists y \in F : R(x, y))}_{P(x)} \quad \text{, s'écrit} \quad \forall x \in E, \exists y \in F : R(x, y)$$

• l'ordre dans lequel ils sont écrits à en général une importance,

Il faut bien distinguer les deux propositions suivantes :

$$\forall x \in E, \; \exists y \in F : R(x, y) \qquad \text{et} \qquad \exists y \in F : \forall x \in E, \; R(x, y)$$

Dans la proposition $\forall x \in E, \exists y \in F : R(x, y)$, l'élément y de F peut être différent pour chaque x de E.

Dans la proposition $\exists y \in F : \forall x \in E, R(x, y)$, on doit avoir un y dans F qui ne dépend pas de l'élément x de E.

• Négation : Quand on nie une proposition de ce type on remplace les $\exists$ par des $\forall$ et inversement les $\forall$ par des $\exists$ puis on nie la proposition $R(x, y)$.

Exemple : La négation de la proposition $\forall x \in E, \exists y \in F : R(x, y)$ est : $\exists x \in E : \forall y \in F, \; Non(R(x, y))$.

1.3 Vocabulaire des ensembles.

1.3.1 Généralités.

- On note $\varnothing$ l'ensemble vide (*celui qui ne contient rien*)
- On note $a \in E$: a est élément d'un ensemble E. Sa négation se note $a \notin E$.
- On note $A \subset B$ la proposition : $\forall x, \quad x \in A \Longrightarrow x \in B$.

  "les éléments de A sont tous des éléments de B". Sa négation se note $A \not\subset B$.
- Lorsque $A \subset B$ on dit que A est un **sous-ensemble** de B ou une **partie** de B.
- Un ensemble ne contenant qu'un élément est appelée **singleton**. On note $\{a\}$.
- Un ensemble contenant exactement deux éléments est appelée **paire**. On note $\{a\,;\,b\}$.
- Un ensemble contenant exactement n éléments est appelée **n-combinaisons**.On note $\{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$.
- Pour E un ensemble quelconque, on note $\boldsymbol{\mathscr{P}(E)}$ l'ensemble des parties de E.

1.3.2 Ensemble défini par une propriété caractéristique.

Soient E un ensemble et $P(x)$ une proposition dépendant de x un élément de E.

Il existe un seul ensemble $A \subset E$, tel que pour tout $x \in E$, on a : $x \in A \iff P(x)$.

On le note : $A = \{\ x \in E \mid P(x)\ \}$

On lit : "A est l'ensemble des éléments x de E vérifiant la proposition $P(x)$".

On dit aussi que $P(x)$ caractérise les éléments x de A.

1.3.3 Ensemble défini comme image directe d'une application.

Soient I et E deux ensembles et f une application qui à chaque élément t de I associe $f(t)$ dans E.

L'ensemble $A = \{\ x \in E \mid \exists t \in I :\ x = f(t)\ \}$ peut aussi s'écrire : $A = \{\ f(t) \mid t \in I\ \}$.

On lit : "A est l'ensemble des $f(t)$ lorsque t décrit I".

On dit aussi que A est l'image directe de I par f. (*Il se note parfois* $f(I)$).

1.3.4 Complémentaire. Intersection, réunion, différence de deux ensembles.

Définitions.

> A et B désignent deux parties d'un ensemble E,
> - complémentaire de A (dans E) : $\complement_E A = \{\ x \in E \mid x \notin A\ \}$
> - intersection de A et B : $A \cap B = \{\ x \in E \mid x \in A \textbf{ et } x \in B\ \}$ *(On lit "A inter B")*
> - réunion de A et B : $A \cup B = \{\ x \in E \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\ \}$ *(On lit "A union B")*
> - Différence de A par B : $A \setminus B = \{\ x \in E \mid x \in A \textbf{ et } x \notin B\ \}$ *(On lit "A privé de B")*

Remarques :

① On pourra aussi noter $\overline{A} = \complement_E A$

② Dire que A et B sont disjoints signifie que : $A \cap B = \varnothing$.

③ Dire que les $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont 2 à 2 disjoints signifie que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

Propriétés :

> Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.
>
> $$\overline{\varnothing} = E \qquad \overline{E} = \varnothing \qquad A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cup \varnothing = A \qquad A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
>
> $$\overline{(\overline{A})} = A \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \setminus B = A \cap \overline{B}$$
>
> Complémentaires d'une union et d'une intersection : (Lois de De Morgan)
>
> $$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
>
> Distributivités :
>
> $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

1.3.5 Partition

Propriétés :

Soient n un entier naturel non nul et A_1, A_2, ... , A_n des parties d'un ensemble E.

Dire que l'ensemble $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ est une partition de E signifie que :

❶ $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

❷ $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$

Dans d'autres filières on ajoute ❸ : $\forall i \in [\![1;n]\!], \quad A_i \neq \varnothing$

1.3.6 Produit cartésien.

Soient E et F deux ensembles,
on note $E \times F$ (on lit "E croix F") l'ensemble de tous les couples (x, y) dont la première composante x est un élément de E et la seconde de F.

Propriété fondamentale :

Pour tous $a \in E$, $a' \in E$, $b \in F$ et $b' \in F$, $\quad (a,b) = (a',b') \iff a = a' \quad$ et $\quad b = b'$

Si A, B et C sont trois ensembles,
on pose $(A \times B) \times C = A \times B \times C$ et les éléments sont notés (x, y, z) et sont appelés triplets.

On définit de même $(A \times B \times C) \times D = A \times B \times C \times D$ etc ...

Pour n un entier tel que $n \geqslant 2$ et E_1, E_2, ..., E_n des ensembles,
les éléments de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ sont notés $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et sont appelés listes ou n-uplets

Propriété fondamentale :

Pour tous $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ... , $x_n \in E_n$ et $x'_1 \in E_1$, $x'_2 \in E_2$, ... , $x'_n \in E_n$,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \iff \forall i \in [\![1;n]\!], \quad x_i = x'_i$$

Pour n un entier tel que $n \geqslant 2$ et E un ensemble, on note :

$$E^n = \{ \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1;n]\!], \quad x_i \in E \ \}$$

Les éléments de E^2 sont appelés **couples** d'éléments de E.
Les éléments de E^3 sont appelés **triplets** d'éléments de E.
Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, les éléments de E^n sont appelés **listes de** n éléments de E.

1.3.7 Notations $\displaystyle\bigcap_{i\in I}$ et $\displaystyle\bigcup_{i\in I}$

Définition.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

- l'**intersection** des A_i : $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \{ \ x \in E \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i \ \}$.
- la **réunion** des A_i : $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \{ \ x \in E \mid \exists i \in I : \quad x \in A_i \ \}$

Propriétés :

Complémentaires d'une union et d'une intersection :

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

Distributivités :

$$B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (B \cup A_i) \qquad B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$$

1.4 Méthodes de raisonnement, rédaction.

Nous présentons ici des types de raisonnements classiques avec des indications sur la rédaction.

1.4.1 Démontrer une implication.

Beaucoup de propositions peuvent s'écrire : $\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$.

Autrement dit :

"Quel que soit l'objet x, **Si** x vérifie $P(x)$ **alors** x vérifie $Q(x)$."

C'est aussi le moyen de montrer une inclusion $A \subset B$:

pour tout $x \in E$, si $x \in A$ alors $x \in B$.

Pour montrer que "$\forall x \in E,\ P(x) \Longrightarrow Q(x)$" est fausse, on donne un contre-exemple.
Rédaction type.

Prenons un élément x de E et supposons $P(x)$ vraie. *(C'est ce que signifie la phrase : "Soit $x \in E$ tel que $P(x)$,".)* *on raisonne ensuite par déductions successives pour montrer que* $Q(x)$ est vraie.

1.4.2 Démontrer une équivalence.

Souvent pour montrer une équivalence, on raisonne par double implication.

Pour démontrer $\forall x \in E, \quad P(x) \iff Q(x)$,
on démontre $\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$ et $\forall x \in E, \quad Q(x) \Longrightarrow P(x)$.

Rédaction type.

$\boxed{\Rightarrow}$ Prenons un élément x de E et supposons $P(x)$ vraie. ...donc ... donc $Q(x)$ (*est vraie*) ■ $\boxed{\Leftarrow}$ Prenons un élément x de E et supposons $Q(x)$ vraie. ...donc ... donc $P(x)$ (*est vraie*) ■ En conclusion : $\boxed{\forall x \in E,\ P(x) \iff Q(x)}$

Dans les cas les plus simples on peut raisonner par équivalence en s'appuyant sur la remarque suivante :

$$\text{Si} \quad P \iff Q \text{ et } Q \iff R \quad \text{alors} \quad P \iff R$$

Rédaction type.

Prenons un $x \in E$ quelconque fixé, (*ici on ne suppose rien*) (*c'est ce que signifie la phrase* " Soit $x \in E$,") $P(x) \iff \ldots \iff \ldots \iff Q(x)$ ■ En conclusion : $\boxed{\forall x \in E,\ P(x) \iff Q(x)}$

1.4.3 Raisonnement par disjonction des cas.

Le principe avec 2 cas :

$$\text{Si} \quad (P_1 \text{ ou } P_2) \text{ et } (P_1 \Longrightarrow Q) \text{ et } (P_2 \Longrightarrow Q) \quad \text{alors} \quad Q.$$

1.4.4 Raisonnement par contraposée.

Le principe :

$$\text{Pour montrer } \forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x), \text{ il suffit de montrer } \forall x \in E, \quad non(Q(x)) \Longrightarrow non(P(x))$$

1.4.5 Raisonnement par l'absurde.

Le principe :

$$\text{Pour montrer } \forall x \in E, \quad P(x), \quad \text{il suffit de montrer} \quad \forall x \in E, \quad non(P(x)) \Longrightarrow Q(x) \textit{ et } non(Q(x))$$

1.4.6 Raisonnement par analyse-synthèse.

Principe :

$$\text{Si} \quad \forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow x \in A \quad \text{alors} \quad \{ \ x \in E \mid P(x) \ \} = \{ \ x \in A \mid P(x) \ \}$$

On cherche à déterminer : $S = \{ \ x \in E \mid P(x) \ \}$
Une première étape permet de réduire le domaine d'étude en raisonnant par condition nécessaire : **l'Analyse**.

$$\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow x \in A$$

Il suffit alors de déterminer : $\{ \ x \in A \mid P(x) \ \}$, **la Synthèse**.
Dans certains cas l'analyse à tellement réduit l'ensemble d'étude A qu'il suffit de vérifier que les éléments x de A vérifient ou non $P(x)$.

1.4.7 Résoudre une équation.

Résoudre une équation revient toujours à passer de l'écriture $\{ \ x \in E \mid P(x) \ \}$ à celle $\{ \ f(t) \mid t \in I \ \}$.

Dans les cas les plus simples à : $\{ \ x \in E \mid P(x) \ \} = \{x_1, \dots, x_n\}$

Passage d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique.

2 Nombres.

2.1 Nombres entiers.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs : $\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

2.1.1 Notation.

Soient a et b deux entiers relatifs vérifiant $a \leqslant b$,

on note $[\![a;b]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre a et b au sens large.

autrement dit : $[\![a;b]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant k \leqslant b\}$

(*C'est l'ensemble des entiers relatifs k vérifiant $a \leqslant k \leqslant b$*)

on note $[\![a;+\infty[\![$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à a.

autrement dit : $[\![a;+\infty[\![= \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant k\}$

(*C'est l'ensemble des entiers relatifs k vérifiant $a \leqslant k$*)

2.1.2 Raisonnement par récurrence.

Soient n_0 un entier naturel et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propositions (*d'assertions*).

$P_0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots.$ sont des affirmations, pour chaque n, P_n peut être vraie ou fausse.

Récurrence simple :

Si $\begin{cases} P_{n_0} \text{ est vraie} \\ \text{quel que soit l'entier } n \geqslant n_0, \quad \text{si } P_n \text{ est vraie alors } P_{n+1} \text{ est vraie} \end{cases}$

alors quel que soit l'entier $n \geqslant n_0$, P_n est vraie.

Récurrence d'ordre 2 :

Si $\begin{cases} P_{n_0} \text{ et } P_{n_0+1} \text{ sont vraies} \\ \text{quel que soit l'entier } n \geqslant n_0, \quad \text{si } P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont vraies alors } P_{n+2} \text{ est vraie} \end{cases}$

alors quel que soit l'entier $n \geqslant n_0$, P_n est vraie.

Récurrence forte :

Si $\begin{cases} P_{n_0} \\ \text{quel que soit } n \geqslant n_0, \ [\forall k \in [\![n_0;n]\!], \quad P_k\ ] \Rightarrow P_{n+1} \end{cases}$ **alors** quel que soit $n \geqslant n_0$, P_n.

Récurrence finie :

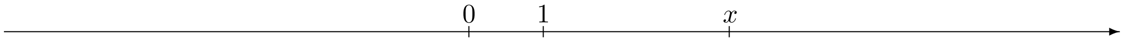
Soit n fixé dans $\mathbb{N}$,

Si $\begin{cases} P_{n_0} \\ \forall k \in [\![n_0;n-1]\!], \quad P_k \Rightarrow P_{k+1} \end{cases}$ **alors** P_n (*est vraie*).

2.2 Nombres réels.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On représente ces nombres sur un axe orienté. (Chaque réel x est associé à un point M, le point d'abscisse x).



2.2.1 Règles de calcul.

Somme et produit

Pour tous réels x, y et z on a :

$$x+y=y+x \qquad x+0=x \qquad (x+y)+z=x+(y+z) \qquad \exists x' \in \mathbb{R}:\ x+x'=0$$

$$xy=yx \qquad x\times 1=x \qquad (xy)z=x(yz) \qquad (\text{si } x\neq 0)\ \ \exists x' \in \mathbb{R}:\ xx'=1$$

$$x(y+z)=xy+xz$$

Quotients de nombres réels :

Soient a, b, c et d des nombres réels non nuls,

$$\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b} \qquad \frac{a}{b}=\frac{ac}{bc} \qquad c\times\frac{a}{b}=\frac{ac}{b} \qquad \frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

Ordre de priorité :

Soient a, b et c des nombres réels non nuls,

$$a+b-c=a+b+(-c) \qquad a-b+c=a+(-b)+c$$

$$a+b\times c=a+(b\times c) \qquad a\times b+c=(a\times b)+c$$

$$\frac{a+b}{c} = (a+b)\times\frac{1}{c} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

2.2.2 Inégalités

Propriétés.

Les propositions suivantes sont vraies quels que soient les réels x, y et a.

$x \leqslant y \Longrightarrow x+a \leqslant y+a \qquad x<y \Longrightarrow x+a<y+a$

$x \leqslant y \iff y-x \geqslant 0 \qquad x<y \iff y-x>0$

$x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0 \Longrightarrow x+y \geqslant 0 \qquad x>0$ et $y \geqslant 0 \Longrightarrow x+y>0$

$x \geqslant 0 \iff -x \leqslant 0 \qquad x>0 \iff -x<0$

$x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0 \iff x=0$

$x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0 \Longrightarrow xy \geqslant 0 \qquad x>0$ et $y \geqslant 0 \Longrightarrow xy \geqslant 0$

$xy \geqslant 0$ si, et seulement si, x et y sont de même signe.

$xy \leqslant 0$ si, et seulement si, x et y sont de signe opposé.

Propositions.

Pour a, b, c, a', b', c' des réels, **Si** $a \leqslant b$ et $a' \leqslant b'$ **alors** $a + a' \leqslant b + b'$ **Si** $a \leqslant b$ et $k \geqslant 0$ **alors** $ka \leqslant kb$ **Si** $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant a' \leqslant b'$ **alors** $aa' \leqslant bb'$ **Si** $a \leqslant b$ et $k \leqslant 0$ **alors** $kb \leqslant ka$ **Si** a et b dans $\mathbb{R}_+^*$, $a \leqslant b$ **alors** $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$ **Si** a et b dans $\mathbb{R}_-^*$, $a \leqslant b$ **alors** $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$ **Si** a et b dans I, $a \leqslant b$ et f croissante sur I **alors** $f(a) \leqslant f(b)$ **Si** a et b dans I, $a \leqslant b$ et f décroissante sur I **alors** $f(b) \leqslant f(a)$

Même propriétés sur les encadrements.

Notation : $\boxed{a \leqslant b \leqslant c \iff a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c}$

2.2.3 Intervalles

Définition :

Les **intervalles** de $\mathbb{R}$ sont les parties A de $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad [\, a \in A \quad \text{et} \quad b \in A \quad \text{et} \quad a \leqslant c \leqslant b \,] \implies c \in A$

En pratique : *(Réponse simple à une question "Qu'est ce qu'un intervalle ?" posée à l'écrit ou l'oral d'un concours)*

Les intervalles de $\mathbb{R}$, autres que $\varnothing$ et $\mathbb{R}$, sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme : $[\,a\,;b\,]\,,\quad]\,a\,;b\,[\,,\quad [\,a\,;b\,[\,,\quad]\,a\,;b\,]\,,\quad [\,a\,;+\infty[\,,\quad]\,a\,;+\infty[\,,\quad]-\infty;b\,]\,,\quad]-\infty;b\,[$ avec a et b deux réels.

2.2.4 Valeur absolue.

Définition :

On définit la **valeur absolue** d'un réel x par : $\lvert x\rvert = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Remarques :

Sur l'axe orienté des réels, on note M le point d'abscisse x, A d'abscisse x_A et B d'abscisse x_B.

- $\lvert x\rvert$ est la distance de M à l'origine. (on dit aussi "de x à l'origine").
- $\lvert x_B - x_A\rvert$ est la distance AB (on dit aussi "de x_A à x_B").
- $x_B - x_A$ est la mesure algébrique $\overline{AB}$.

Propositions :

Soit x, y et h des réels avec $a \geqslant 0$, $\lvert x\rvert \geqslant 0 \qquad (\lvert x\rvert = 0 \iff x = 0) \qquad -\lvert x\rvert \leqslant x \leqslant \lvert x\rvert$ $\lvert x\rvert \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a \qquad \lvert x\rvert \geqslant a \iff x \leqslant -a \quad \text{ou} \quad a \leqslant x$ $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert\lvert y\rvert \qquad \lvert x+y\rvert \leqslant \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \qquad \lvert\lvert x\rvert - \lvert y\rvert\rvert \leqslant \lvert x - y\rvert$

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lvert x+y\rvert = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \iff (x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0) \text{ ou } (x \leqslant 0 \text{ et } y \leqslant 0)}$$

Généralisation de l'inégalité triangulaire.

Soient n un entier non nul et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n réels,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

2.2.5 Puissances entières.

Définition.

Soit x un réel, on définit par récurrence et pour tout entier naturel n le réel x^n par :

$$x^0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{n+1} = x^n \times x$$

Plus simplement : $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}$

Soient x un réel non nuls et n un entier strictement négatif, le réel x^n est égal à $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(-n)}$

Propriétés

Soient x et y deux réels non nuls et n et m deux entiers relatifs.

$$(xy)^n = x^n y^n, \quad x^n \times x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^m = x^{nm}, \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Identités remarquables.

Pour a et b deux réels,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

2.2.6 Racine carrée

Définition :

Pour x un réel positif ou nul, on note $\sqrt{x}$ l'unique réel positif dont le carré vaut x.

Proposition :

x et y désignent deux réels positifs ou nuls,

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \qquad \text{si } y \neq 0 \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \qquad \sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{x^n} = \left(\sqrt{x}\right)^n$$

Attention : Quel que soit le réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

2.2.7 Puissances réelles.

Définition :

Soit a et b deux réels, avec $\boldsymbol{a > 0}$, on appelle a puissance b le réel $e^{b\ln(a)}$.

$$\boldsymbol{a^b \overset{def}{=} e^{b\ln(a)}}$$

Propriétés algébriques :

Soient a, a' deux réels strictement positifs et b, b' deux réels quelconques.

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad (aa')^b = a^b a'^b \qquad a^{b+b'} = a^b a^{b'} \qquad \left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'} \qquad a^{b-b'} = \frac{a^b}{a^{b'}}$$

Propositions :

$$\forall b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(a^b\right) = b\ln(a) \qquad \forall b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}, \quad (e^a)^b = e^{ab}$$

2.2.8 Majoration, minoration.

Définition :

Soit m un réel, A une partie de $\mathbb{R}$,

① Dire que m est un majorant de A signifie que : $\forall x \in A, \quad x \leqslant m.$

② Dire que m est un minorant A signifie que : $\forall x \in A, \quad x \geqslant m.$

Définition :

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définies sur un ensemble E ,

Dire que f est majorée sur E signifie que : $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E, \quad f(x) \leqslant M.$

Autrement dit :

Dire que f est majorée sur E signifie que l'ensemble : $\{f(x) \mid x \in E\}$ est majorée.

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$,

Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée signifie que : $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in N, \quad u_n \leqslant M.$

Autrement dit :

Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée signifie que l'ensemble : $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majorée.

2.2.9 Plus grand ou plus petit élément d'un ensemble

Définitions :

Soit a un réel, A une partie non vide de $\mathbb{R}$,

① Dire que a est le plus grand élément de A signifie que :

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad x \leqslant a$$

Lorsqu'il existe, il est unique on le note $\max(A)$.

② Dire que a est le plus petit élément de A signifie que :

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad x \geqslant a$$

Lorsqu'il existe, il est unique on le note $\min(A)$.

Définition :

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définies sur un ensemble E et M un réel ,

Dire que M est le maximum de f sur E signifie que :

$$\exists x_0 \in E : \ f(x_0) = M \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad f(x) \leqslant M.$$

Autrement dit : Dire que M est le maximum de f sur E signifie que :

M est le plus grand élément de l'ensemble $\{f(x) \mid x \in E\}$.

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$,

Dire que M est le maximum de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ signifie que :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : u_{n_1} = M \quad \text{et} \quad \forall n \in N, \quad u_n \leqslant M.$$

Autrement dit : Dire que M est le maximum de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ signifie que :

M est le maximum de l'ensemble : $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2.2.10 Borne supérieure ou inférieure

Définition :

La borne supérieure a d'une partie A de $\mathbb{R}$ est caractérisée ("$a = \sup(A) \iff$") par :

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant a \qquad \text{et} \qquad \forall b < a, \ \exists x \in A : \ b < x$$

La borne inférieure a d'une partie A de $\mathbb{R}$ est caractérisée ("$a = \inf(A) \iff$") par :

$$\forall x \in A, \quad a \leqslant x \qquad \text{et} \qquad \forall b > a, \ \exists x \in A : \ x < b$$

Autrement dit :

A une partie de $\mathbb{R}$,

- La **borne supérieure** de A est, lorsqu'il existe, le plus petit des majorants de A.
- La **borne inférieure** de A est, lorsqu'il existe, le plus grand des minorants de A.

Théorème : *(Propriété de la borne supérieure, de la borne inférieure)*

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

2.2.11 Partie entière.

Définition :

Soit x un réel, il existe un et un seul entier relatif n vérifiant :

$$n \leqslant x < n+1$$

cet entier s'appelle **la partie entière** de x et se note $\lfloor x \rfloor$

Propriétés :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls,
$\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor$ est le quotient dans la division euclidienne de a par b.

Séparation des termes d'une somme.

Soit (a_n) une suite de nombre complexes,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2k+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} a_{3k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} a_{3k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} a_{3k+2}$$

2.3 Nombres complexes.

Introduction.
Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ vérifiant :
❶ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
❷ on définit $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$ avec les mêmes propriétés que $+$ et $\times$ sur $\mathbb{R}$.
❸ il existe un élément de $\mathbb{C}$ noté i et vérifiant $i \times i = -1$
❹ tout élément de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière unique $x + i \times y$ où x et y sont deux nombres réels.

Attention :
Dans $\mathbb{C}$ on ne définit pas d'ordre on ne peut pas comparer (*plus petit ou plus grand*) deux nombres complexes.

2.3.1 Forme algébrique.

Identification.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + iy = x' + iy' \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'}$$

2.3.2 Règles de calcul.

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2 et z_3 et tous nombres réels x_1, y_1, x_2 et y_2 on a :

$$i^2 = -1 \qquad (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad z_1 + 0 = z_1 \qquad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad \exists z' \in \mathbb{C} : \ z + z' = 0$$

$$z_1z_2 = z_2z_1 \qquad z_1 \times 1 = z_1 \qquad (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \qquad (\text{si } z \neq 0) \ \ \exists z' \in \mathbb{C} : \ zz' = 1$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

Les identités remarquables, les formules du binome et de Bernoulli ont été enoncés avec des nombres complexes.

Remarque : *(Comme pour les réels, on a aussi la propriété suivante)* :

$$\boxed{\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad z_1z_2 = 0 \iff z_1 = 0 \quad \text{ou} \quad z_2 = 0}$$

2.3.3 Partie réelle et partie imaginaire.

Définition.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{Re}(x + iy) = x \qquad \mathrm{Im}(x + iy) = y}$$

Remarques :
- Les complexes de partie réelle nulle sont appelés imaginaires purs.
- On note : $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0 \}$ (l'ensemble des imaginaires purs).

Propriétés

Etant donné deux réels λ et λ' et deux nombres complexes z et z',

$$\mathrm{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathrm{Re}(z) + \lambda' \mathrm{Re}(z') \qquad \mathrm{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathrm{Im}(z) + \lambda' \mathrm{Im}(z')$$

Généralisation.

Soient n un entier non nul et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n complexes et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n réels.

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{Re}(a_k) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{Im}(a_k)$$

2.3.4 Conjugué.

Définition.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on note $z = x + iy$ avec x, y deux réels,
on appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ et définie par : $\overline{z} = x - i\,y$

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z' , tout réel λ :

$$\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z} \qquad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z}\;\overline{z'} \qquad \text{Si } z \neq 0,\; \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}} \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\quad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Généralisation.

Soient n un entier non nul et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n complexes,

$$\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} \qquad \text{et} \qquad \overline{\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)} = \prod_{k=1}^{n} \overline{a_k}$$

Propositions :

Pour tout nombre complexe z :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \qquad z \in i\mathbb{R} \iff z + \overline{z} = 0$$

2.3.5 Module.

Définition :

Le module du complexe z est le réel $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ou encore pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriétés.

Pour tout nombres complexes z et z' , tout réel λ :

$$|\lambda z| = |\lambda|\,|z| \qquad |zz'| = |z|\,|z'| \qquad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|} \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\quad |z^n| = |z|^n$$

Propositions :

Pour tout nombre complexe z non nul : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Pour tout nombre complexe z : $|z| = \mathrm{Re}(z) \iff z \in \mathbb{R}_+$

Inégalités.

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \qquad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \qquad |z + z'| \leqslant |z| + |z'| \qquad \big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$$

Généralisation.

Soient n un entier non nul et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres complexes,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad \text{et} \qquad \left|\prod_{k=1}^{n} a_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |a_k|$$

2.3.6 Notation $e^{i\theta}$.

Définition :

$$\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \text{ on note : } \quad e^{i\theta} \underset{\text{def}}{=} \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$$

Propositions :

Pour tout $(\theta,\, \theta') \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1\ , \qquad e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}\ , \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}\ , \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i(n\theta)}$

Formules d'Euler.

$$\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

2.3.7 Ecriture exponentielle d'un nombre complexe.

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul, on appelle **argument** de z tout réel θ tel que : $\quad z = |z|e^{i\theta}$

Propositions : *Identification.*

Etant donné de réels strictement positifs r_1 et r_2 et deux réels θ_1 et θ_2,

$$r_1\,e^{i\theta_1} = r_2\,e^{i\theta_2} \iff r_1 = r_2 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

Si θ_1 et θ_2 appartiennent à $[\mathbf{0}; \mathbf{2\pi}[$, (ou à $]-\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\pi}]$,)

$$r_1\,e^{i\theta_1} = r_2\,e^{i\theta_2} \iff r_1 = r_2 \quad \text{et} \quad \theta_1 = \theta_2$$

Proposition :

Soit z un nombre complexe non nul et θ_0 un argument de z,
l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des réels de la forme : $\theta_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés.

Quel que soient les nombres complexes non nuls z_1 et z_2,

- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$.
- $\arg(\,z_1^n\,) \equiv n\,\arg(z_1)\ [2\pi]$

2.3.8 Exponentielle d'un nombre complexe.

Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$,

$$e^z \underset{\text{def}}{=} e^a\,e^{ib}$$

Théorème :

$$\boxed{\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad e^{(z+z')} \;=\; e^z\, e^{z'}}$$

Propositions :

Pour tout $(z,\, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'} \qquad \frac{1}{e^z} = e^{-z} \qquad \overline{e^z} = e^{\overline{z}} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad (e^z)^n = e^{nz}$$

$$|e^z| \;=\; e^{\mathrm{Re}(z)} \qquad , \qquad \arg(e^z) =\; \mathrm{Im}(z) \pmod{2\pi}$$

2.4 Trinôme à coefficients réels.

On appelle trinôme à coefficients réels toute application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = az^2 + bz + c$$

2.4.1 Racines.

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ *(le discriminant du polynôme)*

- Si $\Delta > 0$, le trinôme possède exactement deux racines et elles sont réelles : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, le trinôme possède une unique racine réelle : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, il possède exactement deux racines complexes conjuguées : $\omega = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\quad \overline{\omega} = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

2.4.2 Forme factorisée et signe.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, $\quad aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$.
  le signe de $P(x)$ celui de a à l'extérieur des racines et l'opposé entre les deux racines.

- Si $b^2 - 4ac = 0$, $\quad aX^2 + bX + c = a(X - x_0)^2$.
  le signe de $P(x)$ est celui de a et s'annule en x_0.

- Si $b^2 - 4ac < 0$, $\quad aX^2 + bX + c = a(X - \omega)(X - \overline{\omega})$
  Attention ! cette dernière expression ne justifie pas le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$. (*le signe de $P(x)$ est celui de a*)

2.4.3 Forme canonique et sommet.

Pour tout trinôme $aX^2 + bX + c$, on peut trouver deux réels α et β tels que : $\quad aX^2 + bX + c = a\,(X - \alpha)^2 + \beta$.
Le point de coordonnées (α, β) est le sommet de la parabole

2.4.4 Somme et produit des racines.

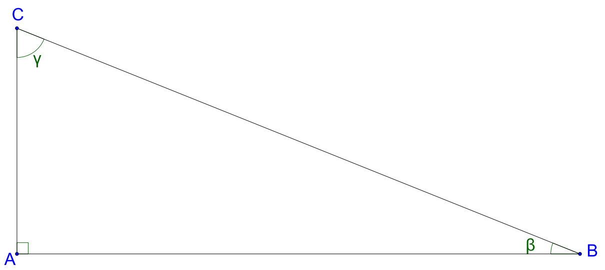
$$X^2 - sX + p = (X - \lambda)(X - \mu) \iff \lambda + \mu = s \quad \text{et} \quad \lambda\mu = p$$

$$aX^2 + bX + c = a\;(X - x_1)(X - x_2) \quad \text{ou encore :} \quad aX^2 + bX + c = a\left(X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1 x_2\right)$$

$$aX^2 + bX + c \;=\; a\left(X^2 \;-\; \underbrace{\left(-\frac{b}{a}\right)}_{\textit{somme des rac.}} X \;+\; \underbrace{\left(\frac{c}{a}\right)}_{\textit{produit des rac.}} \right)$$

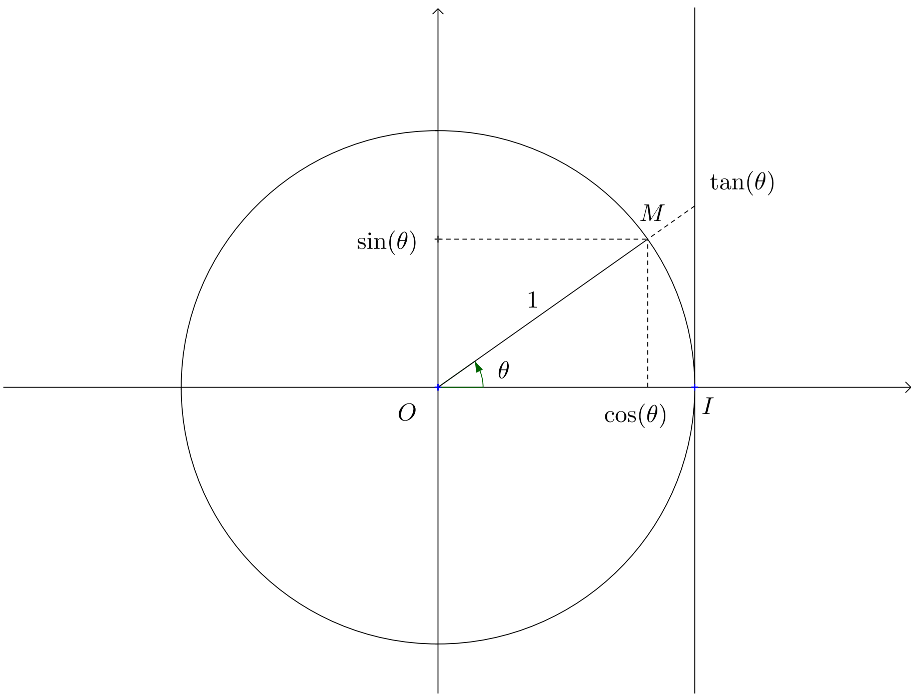
3 Trigonométrie.

3.1 Dans le triangle rectangle.



$\cos(\beta) = \dfrac{AB}{BC}$ $\sin(\beta) = \dfrac{AC}{BC}$ $\cos(\gamma) = \dfrac{AC}{BC}$ $\sin(\gamma) = \dfrac{AB}{BC}$ $\tan(\beta) = \dfrac{AC}{AB}$ $\tan(\gamma) = \dfrac{AB}{AC}$

3.2 Dans le cercle trigonométrique.



Remarque : Le cercle est de rayon 1, il est orienté dans le sens antihoraire, les points du cercle sont repérés par leur abscisse curviligne (l'arc orienté $\widehat{IM}$), sur la figure cette abscisse vaut θ.

Définitions :

$\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont les coordonnées du point M du cercle trigonométrique associé à θ.

Propositions.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1 \qquad \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Définition :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Remarque : Différentes façons de noter l'ensemble de définition de la fonction tangente :

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad D_{\tan} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \qquad D_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi - \frac{\pi}{2}\ ;\ k\pi + \frac{\pi}{2} \right[$$

3.3 Périodicités.

Les fonctions $t \longmapsto \cos(t)$ et $t \longmapsto \sin(t)$ sont de période 2π.

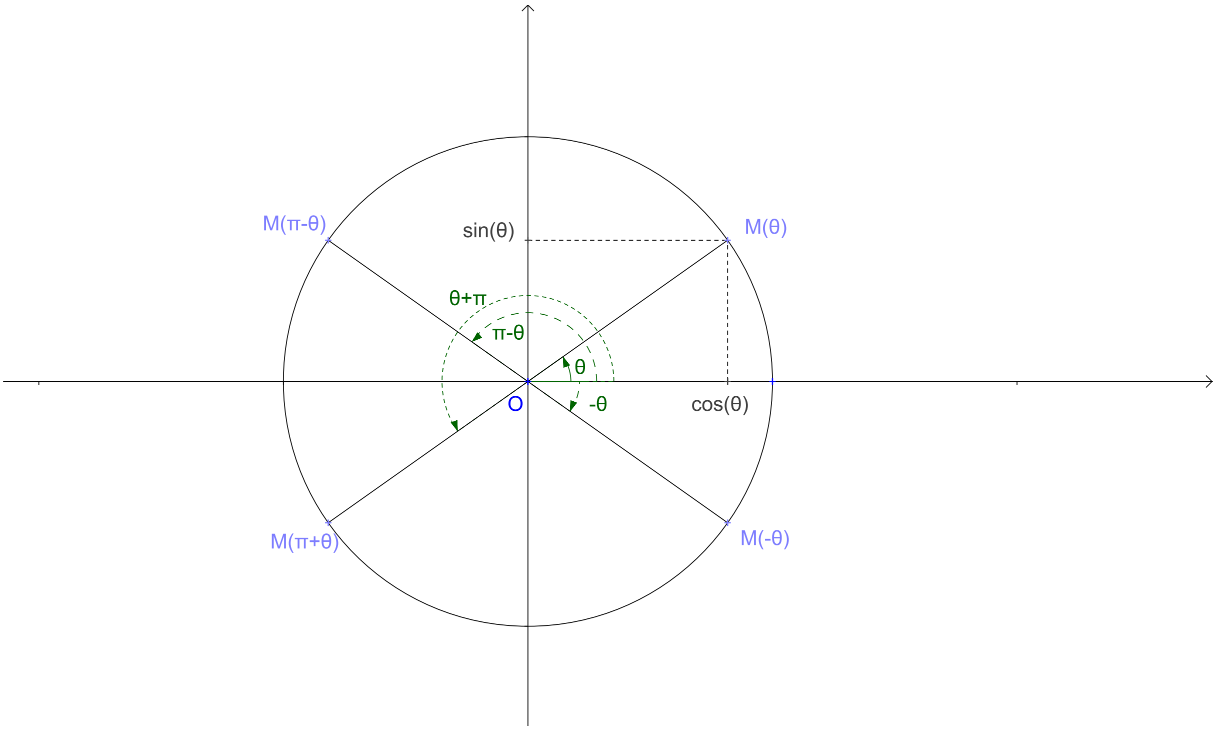
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \qquad \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

La fonction $t \longmapsto \tan(t)$ est de période π.

$$\forall \theta \in D_{tan}, \quad \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$$

3.4 Symétries.

Avec les axes :

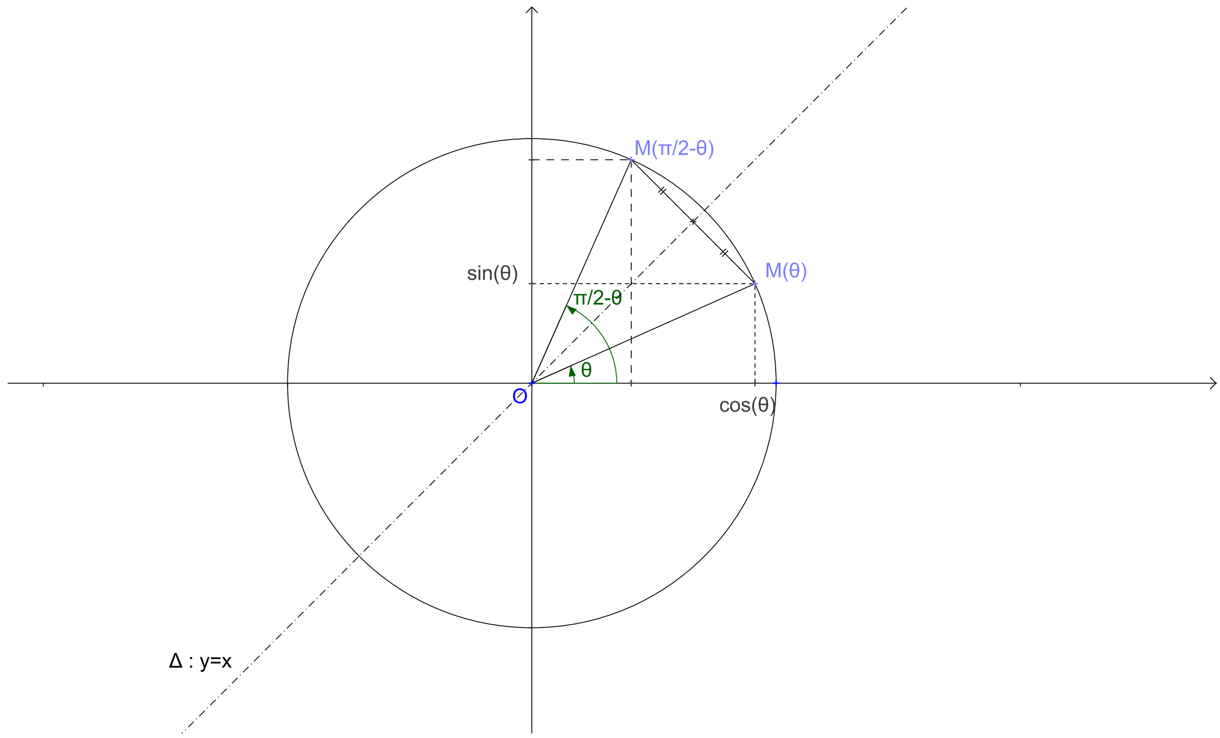


$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \qquad \cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$$
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \qquad \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \qquad \sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$$
$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta) \qquad \tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta) \qquad \tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$$

Remarque :

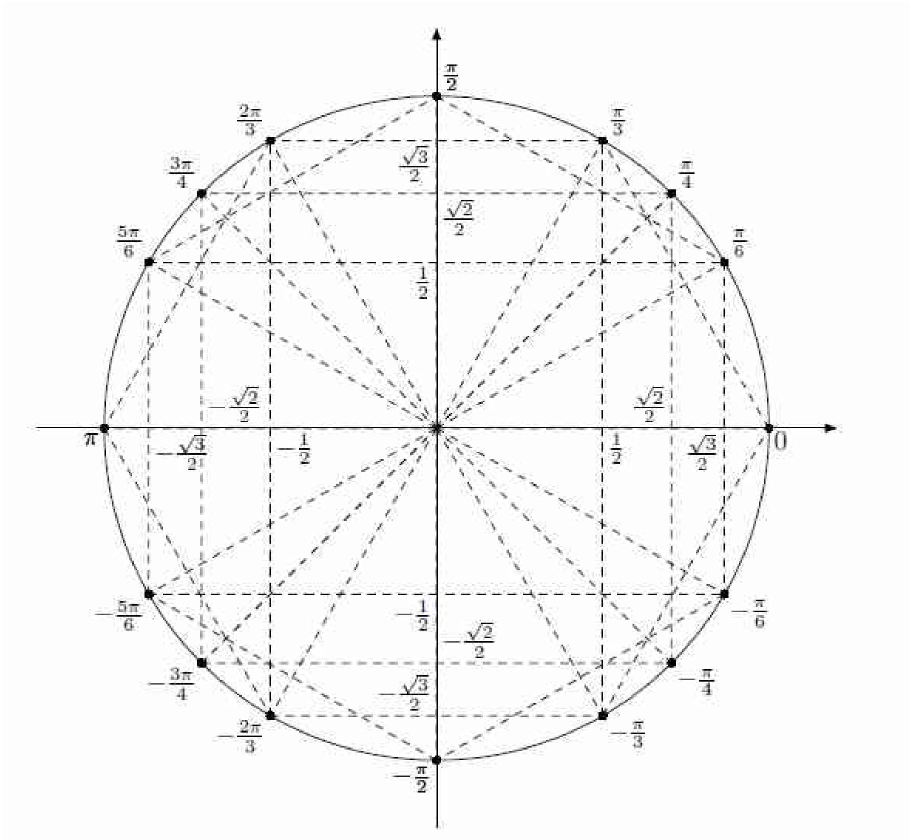
Les fonctions sinus et tangente sont impaires. La fonction cosinus est paire.

Avec la première bissectrice :



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan(\theta)}$$

3.5 Valeurs remarquables.



3.6 Formules.

Formule d'addition.

A savoir par cœur :

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

On en déduit en remplaçant β par $-\beta$:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

On en déduit les formules suivantes : (*en prenant* $\alpha=\beta=\theta$)

Formules de duplications.

$$\cos(2\theta) \;=\; \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta) \qquad \sin(2\theta) \;=2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

On en déduit avec la relation $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$

$$\cos(2\theta) \;=\; 2\cos^2(\theta)-1 \qquad \cos(2\theta) \;=\; 1-2\sin^2(\theta)$$

3.7 Equations.

Théorème.

Pour tout $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$,

$$\cos(\theta)=\cos(\theta') \iff \exists k\in\mathbb{Z}: \quad \theta=\theta'+2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta=-\theta'+2k\pi$$

$$\sin(\theta)=\sin(\theta') \iff \exists k\in\mathbb{Z}: \quad \theta=\theta'+2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta=\pi-\theta'+2k\pi$$

Pour tout $(\theta,\theta')\in(D_{tan})^2$,

$$\tan(\theta)=\tan(\theta') \iff \exists k\in\mathbb{Z}: \quad \theta=\theta'+k\pi$$

Proposition.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

Si $x^2+y^2=1$,

alors le système d'équations d'inconnue $\theta\in[0;2\pi[$, $\begin{cases}\cos(\theta)=x\\ \sin(\theta)=y\end{cases}$ a une unique solution.

alors le système d'équations d'inconnue $\theta\in]-\pi;\pi]$, $\begin{cases}\cos(\theta)=x\\ \sin(\theta)=y\end{cases}$ a une unique solution.

Proposition.

Quel que soit $x\in[-1,1]$,

① Il existe un unique réel θ appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\theta)=x$

② Il existe un unique réel θ appartenant à $[0;\pi]$ tel que $\cos(\theta)=x$

Quel que soit $x\in\mathbb{R}$,

③ il existe un unique réel θ appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\theta)=x$

3.8 Arcsinus, arccosinus et arctangente.

Définitions.

Soit $x \in [-1, 1]$,

① On appelle **arcsinus** de x l'unique réel θ appartenant à $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\theta) = x$

② On appelle **arccosinus** de x l'unique réel θ appartenant à $[0; \pi]$ tel que $\cos(\theta) = x$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

③ On appelle **arctangente** de x l'unique réel θ appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\theta) = x$

Remarques :

- Pour x un réel de $[-1, 1]$, l'arccosinus de x est l'arc de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut x.
- Pour x un réel de $[-1, 1]$, l'arcsinus de x est l'arc de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x.
- Pour x un réel quelconque, l'arctangente de x est l'arc de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x.

3.9 Transformation d'une expression de la forme : a cos(x)+b sin(x).

On cherche à transformer une expression de la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$ en une expression de la forme $r\cos(x - \varphi)$ a, b, x, r, φ des réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

En trois étapes :

❶ On met en facteur $\sqrt{a^2 + b^2}$,

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\cos(x)\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \sin(x)\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

❷ On cherche φ tel que : $\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$

On peut trouver un tel φ car le point de coordonnées $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} ; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ est sur le cercle trigonométrique.

❸ on a alors : $a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\,\left(\cos(x)\cos(\varphi) + \sin(x)\sin(\varphi)\right)$

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\,\cos(x - \varphi)$$

3.10 Linéarisation

Etant donnés deux entiers naturels m et n et un réel θ, linéariser $\cos^m(\theta)\sin^n(\theta)$ c'est l'exprimer comme somme de termes de la forme $\lambda\cos(k\theta)$ ou $\lambda\sin(k\theta)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

① Remplacer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ par respectivement $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (formules d'Euler).

② Développer entièrement l'expression en nombre complexes (*souvent en utilisant la formule du binôme*).

③ Réutiliser les formules d'Euler pour revenir à des cosinus et des sinus (des nombres réels).

4

Méthodes de calcul.

4.1 Sommes.

4.1.1 Définition.

Soient m et n deux entiers, et $a_0, \dots, a_k, \dots$ des nombres complexes.

$$\text{pour } n < m, \quad \sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \ , \qquad \sum_{k=m}^{m} a_k = a_m \qquad \text{et} \qquad \text{pour } n \geqslant m \qquad \sum_{k=m}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k \right) + a_{n+1}$$

plus simplement : quand $n \geqslant m$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \underbrace{a_m + \cdots + a_n}_{n-m+1 \text{ termes}}.$

4.1.2 Des sommes à connaître.

$(n \in \mathbb{N}, \ m \in \mathbb{N}, \ (m \leqslant n) \quad \text{et} \quad q \in \mathbb{C} \setminus \{1\})$

$$\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1 \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4.1.3 Formule de Bernoulli.

Soient n un entier naturel et (a, b) un couple de nombres complexes.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

4.1.4 Linéarité.

Pour λ un nombre complexe, (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes.

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda \, a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

4.1.5 "Relation de Chasles".

Si n_1, n_2 et n_3 sont trois entiers vérifiant $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$, on a :

$$\sum_{k=n_1}^{n_3} a_k = \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k + \sum_{k=n_2+1}^{n_3} a_k \qquad \text{ou} \qquad = \sum_{k=n_1}^{n_2-1} a_k + \sum_{k=n_2}^{n_3} a_k$$

4.1.6 Changement d'indice.

Translation ou décalage.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p} \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}$$

Symétrie ou lecture inverse.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \qquad \sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_{n+p-k}$$

4.1.7 Sommes télescopiques.

Lorsque les a_k peuvent s'écrire $u_{k+1} - u_k$ ou $u_k - u_{k+1}$

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m \qquad \sum_{k=m}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_m - u_{n+1}$$

4.1.8 Sommes et inégalités

Soient (a_k) et (b_k) deux suites de nombres réels et n un entier naturel,

Si pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $a_k \leqslant b_k$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} b_k$

4.1.9 Séparation des termes d'indice pair et d'indice impair.

Soit (a_n) une suite de nombre complexes,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2k+1}$$

4.2 Produits, factorielles.

4.2.1 Définition.

Soient m et n deux entiers, et $a_0, \cdots a_n ...$ des nombres complexes.

$$\forall n < m, \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \ , \qquad \prod_{k=m}^{m} a_k = a_m \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant m \quad \prod_{k=m}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k \right) \times a_{n+1}$$

Autrement dit, quand $n \geqslant m$: $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = \underbrace{a_m \times \cdots \times a_n}_{n-m+1 \text{ facteurs}}$

4.2.2 Factorielle. notation $n!$

Définition.

On appelle factorielle d'un entier naturel n l'entier : $\prod_{k=1}^{n} k$, on le note $n!$.

$$0! = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = n! \times (n+1)$$

Autrement dit :

$$n! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n}_{\text{produit de tous les entiers compris entre 1 et } n} = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

4.2.3 Produits à connaître

Pour $a \in \mathbb{C}$ et n, m deux entiers vérifiant $1 \leqslant m \leqslant n$,

$$\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1} \quad , \quad \prod_{k=m}^{n} k = \frac{n!}{(m-1)!}$$

4.2.4 Propriétés.

Soient m, n deux entiers tels que $m \leqslant n$, $a_0, \cdots a_n$... et $b_0, \cdots b_n$... des suites de nombres complexes non nuls.

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k \qquad \prod_{k=m}^{n} (a_k b_k) = \prod_{k=m}^{n} a_k \times \prod_{k=m}^{n} b_k \qquad \prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=m}^{n} a_k}{\prod_{k=m}^{n} b_k}$$

et pour p un entier :

$$\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^p = \prod_{k=m}^{n} a_k^p$$

4.2.5 "Relation de Chasles".

Soient n_1, n_2 et n_3 sont trois entiers vérifiant $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$ et $a_0, \cdots a_k$... des nombres complexes.

$$\prod_{k=n_1}^{n_3} a_k = \prod_{k=n_1}^{n_2} a_k \times \prod_{k=n_2+1}^{n_3} a_k$$

4.2.6 Changement d'indice.

Soient n, m et p sont trois entiers et $a_0, \cdots a_k$... des nombres complexes.

Translation ou décalage.

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}$$

Symétrie ou lecture inverse.

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \prod_{k=0}^{n} a_{n-k} \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \qquad \prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{k=p}^{n} a_{n+p-k}$$

4.2.7 Produits télescopiques.

Lorsque les a_k peuvent s'écrire $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ ou $\dfrac{u_k}{u_{k+1}}$ et pour $m \leqslant n$

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m} \qquad \prod_{k=m}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{u_m}{u_{n+1}}$$

4.2.8 Produits et inégalités

Soient (a_k) et (b_k) deux suites de nombres réels et n un entier,

Si pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ alors $0 \leqslant \prod_{k=0}^{n} a_k \leqslant \prod_{k=0}^{n} b_k$

4.2.9 Exponentielle et logarithme.

Exponentielle d'une somme :

Pour tout $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(a_k)$$

Logarithme népérien d'un produit :

Pour tout $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$,

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$$

4.3 Coefficients binomiaux.

4.3.1 Définition.

Soient n, p deux entiers relatifs, on définit $\dbinom{n}{p}$ par :

si $0 \leqslant p \leqslant n$: $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ sinon, $\dbinom{n}{p} = 0.$

Remarques :

- On lit "p parmi n".
- Dans un schéma de Bernoulli de profondeur n : $\dbinom{n}{p}$ est le nombre de chemins avec exactement p succès.

4.3.2 Formules.

Soients n, p deux entiers naturels ,

(1) $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$ (2) $\dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1}$ (3) $\dbinom{n+1}{p+1} = \dfrac{n+1}{p+1}\dbinom{n}{p}$

4.3.3 Cas particuliers.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

4.3.4 Avec la notation produit :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p\,!} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{p!} \qquad \binom{n}{p} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k} = \prod_{k=1}^{p} \frac{(n-k+1)}{k}$$

4.3.5 Triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

4.3.6 Formule du binôme de Newton.

Soient n un entier naturel et (a, b) un couple de nombres complexes,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

4.3.7 Sommes à connaître.

(*Exercices très classiques.*)

❶ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

❷ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$

❸ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$

❹ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

4.3.8 Formule de Vandermonde.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

4.4 Sommes doubles.

Dans ce paragraphe pour tout couple d'entiers (i,j), $a_{i,j}$ désigne un nombre complexe.

4.4.1 Somme double rectangulaire.

On note $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij}$ la somme de tous les nombres a_{ij} lorsque i va de 1 à n et j de 1 à m.

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$$

On peut aussi noter :

$$\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

4.4.2 Produits de deux sommes simples.

Dans le cas où $a_{ij} = \alpha_i\beta_j$

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} \alpha_i\beta_j = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i\right)$$

Attention : Ne pas inventer de formule !!!

$$\text{En général :}\quad \sum_{k=1}^{n}(a_k b_k) \neq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

4.4.3 Somme double triangulaire.

On note $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$ la somme de tous les a_{ij} lorsque i va de 1 à n et j de 1 à m avec la contrainte $i\leqslant j$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right)$$

On peut aussi noter :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$$

On note $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}$ la somme de tous les a_{ij} lorsque i va de 1 à n et j de 1 à m avec la contrainte $i<j$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}\right)$$

Remarque : On peut aussi écrire :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}\right)$$

4.4.4 Linéarité.

λ désigne un nombre complexe.

$$\boxed{\sum_{(i,j)}\lambda\, a_{ij} = \lambda\sum_{(i,j)} a_{ij} \qquad\qquad \sum_{(i,j)}(a_{ij}+b_{ij}) = \sum_{(i,j)} a_{ij} + \sum_{(i,j)} b_{ij}}$$

5

Vocabulaire des applications.

5.1 Introduction.

Une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F.

Notations et définitions :

- Pour x dans E, l'unique élément de F lié à x est appelé **image de x par f** et on le note $\boldsymbol{f(x)}$.
- Soit $y \in F$, on appelle **antécédent** de y par f, tout élément x de E vérifiant : $f(x) = y$
- Les éléments de F qui sont l'image d'un élément de E sont appelés **valeurs** de f.
- On dit que l'application est définie sur E et à valeurs dans F.
- On note $f(E)$ l'ensemble des valeurs prises par f.
  Autrement dit : $f(E) = \{\, f(x) \mid x \in E\}$ ou encore $f(E) = \{\, y \in F \mid \exists x \in E : \; y = f(x) \,\}$
- E est l'**ensemble de départ** de f, ou encore son ensemble de définition.
- F est l'**ensemble d'arrivée** de f, (*cet ensemble contient l'ensemble des valeurs prises par f*)
- On note F^E l'**ensemble des applications** de E dans F.
- **Application identitée de E** : On note Id_E l'application $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$
- Une partie de $E \times F$: une application peut être assimilée à une partie G de $E \times F$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F : (x, y) \in G$$

Egalité entre deux applications :

Deux applications $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ sont égales si, et seulement si,

$$E = E' \quad , \quad F = F' \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

Définition d'une fonction.

Une fonction de E dans F associe à certains éléments de E un unique élément de F.

Remarques : Pour f une fonction de E dans F.

- Contrairement aux applications des éléments de E n'ont pas d'image par f.
- L'ensemble des éléments de E qui ont une image par f est appelé **domaine de définition** de f.
- Une application de E dans F est une fonction de E dans F définie sur E.

Restriction et prolongement :

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
Pour A est une partie de E, $\quad (A \subset E)$
on appelle restriction de f à A, notée $f_{|A}$, l'application de A dans F, vérifiant : $\forall x \in A, \quad f_{|A}(x) = f(x)$.

Pour B un ensemble contenant E, $\quad (E \subset B)$,
on appelle prolongement à B de f toute application g de B dans F vérifiant : $\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$

Remarque :
g est un prolongement de f ssi f est une restriction de g.

Définition : *Image directe d'une partie de E.*

Soit A une partie de E, on note $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A,
on dit que $f(A)$ est l'**image directe** de A par f.
Autrement dit : $\quad f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \quad$ ou encore $\quad f(A) = \{\, y \in F \mid \exists x \in A : \ y = f(x) \,\}$

5.2 L'application composée.

E, F et G sont trois ensembles quelconques.

Définition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications,
l'application de E dans G qui à x associe $g(f(x))$ est appelée **(application) composée** de f par g.
On la note : $\quad g \circ f$

Remarques :

- On a : $\quad \begin{array}{rcl} g \circ f : E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g \circ f(x) \quad (= g(f(x))) \end{array}$
- L'ensemble de départ de $g \circ f$ est celui de f et son ensemble d'arrivée est celui de g.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ & & & & \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Proposition :

Etant données, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications, on a :

$$Id_F \circ f = f \ , \qquad f \circ Id_E = f \qquad \text{et} \qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Attention : en général, $g \circ f \neq f \circ g$.

5.3 Injections, surjections.

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

5.3.1 Injection.

Définition :

Dire que f est une **injection** (ou est injective) signifie que :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Remarque :
f est injective lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus un antécédent par f.

5.3.2 Surjection.

Définition :

Dire que f est une **surjection** (ou est surjective) signifie que :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E : \quad y = f(x)$$

Remarques :

- f est surjective lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent par f.
- Pour savoir si f est surjective on cherche à résoudre $f(x) = y$ pour un y quelconque dans F.

5.4 Bijection et application réciproque.

Définition : (bijection)

Soient E, F deux ensembles et f une application de E dans F,
Dire que f est **une bijection** (ou est bijective) signifie que : $\forall y \in F, \quad \exists! x \in E \ : \quad y = f(x)$

Remarque : f est bijective si, et seulement si, f est injective et surjective.

Définition : (application réciproque)

Soient E, F deux ensembles et f une application de E dans F,
Lorsque f est une bijection :
on peut définir l'application de F dans E qui à tout élément de F associe son unique antécédent par f.

Cette application notée f^{-1} est appelée **réciproque** de f.

Remarque :
quand f est une bijection, quel que soit $y \in F$, on note $f^{-1}(y)$ l'unique x de E vérifiant $f(x) = y$.

Propositions :

Si f est une bijection, alors :
① $\forall (x, y) \in E \times F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
② $f \circ f^{-1} = Id_F \qquad f^{-1} \circ f = Id_E$
③ f^{-1} est une bijection de F dans E
④ l'application réciproque de f^{-1} est alors égale à f : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

Théorème : (*La composée de deux bijections est une bijection*)

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et l'application réciproque de $g \circ f$ est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Théorème

Une application $f : E \to F$ est une bijection si, et seulement si, il existe $g : F \to E$ telle que

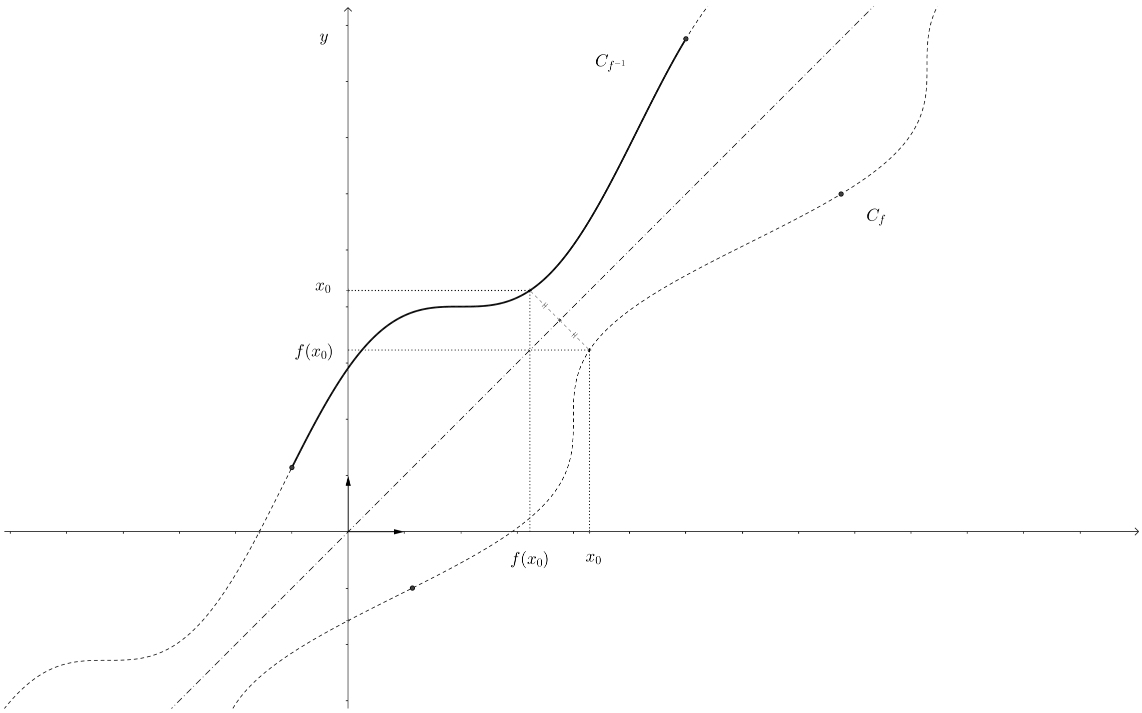
$$g \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = Id_F$$

et alors g est la **réciproque** de f.

Des propriétés spécifiques aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

Soient D_1 et D_2 deux parties de $\mathbb{R}$,
Si f réalise une bijection de D_1 dans D_2 alors :
❶ $C_{f^{-1}}$ est la symétrique de C_f par la symétrie orthogonale d'axe $\Delta : y = x$.
❷ Si f est impaire alors f^{-1} est impaire.
❸ Si f est strictement croissante sur D_1 alors f^{-1} est strictement croissante sur D_2.
❹ Si f est strictement décroissante sur D_1 alors f^{-1} est strictement décroissante sur D_2.

Remarque :
f réalise une bijection de D_1 dans D_2 signifie que $\begin{array}{rcl} D_1 & \longrightarrow & D_2 \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est correctement définie et est bijective.



5.5 Fonctions indicatrices.

Définition :

Soient E un ensemble et A une partie de E,
On appelle **fonction indicatrice** de A,
l'application de E dans $\{0,1\}$ qui x associe 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

Remarque : On la note : $\mathbb{1}_A$ *(on trouve aussi la notation χ_A)*

Propositions :

❶ Soit A une partie de E,

$$\forall x \in E, \qquad \mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A$$

❷ Soit A une partie de E,

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$$

❸ Soient A et B deux parties de E,

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$

Une autre notation.

Soit E un ensemble, et $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x de E.

pour chaque élément x de E, $P(x)$ peut être "Vraie" ou "Fausse".

en notant $A = \{x \in E \mid P(x)\}$

Pour tout x de E, on note :

$$\mathbb{1}_{P(x)} = \mathbb{1}_A(x)$$

Remarque : Pour x un élément de E, $\mathbb{1}_{P(x)}$ vaut 1 si $P(x)$ est vraie et 0 sinon.

Proposition : *Fonctions indicatrices et dénombrement.*

Soit E est un ensemble fini,

si A est une partie de E alors $\operatorname{card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$

Proposition : *Fonctions indicatrices et variables aléatoires.*

Pour A un événement de l'espace probabilisé fini : $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$,

$\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Remarque : $E(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$

6

Ensembles finis. Dénombrement.

6.1 Généralités

Définition :

Dire qu'un ensemble non vide E est fini
signifie qu'il existe un entier naturel n et une bijection de $[\![1;n]\!]$ dans E.
Ce nombre n est alors unique et est appelé cardinal de E.

Remarques :
- on note : $\text{card}(E)$ ce nombre entier (ou encore $\#(E)$). ($\text{card}(E) \in \mathbb{N}$)
- E est fini lorsqu'on peut numéroter ses éléments avec un nombre limité de numéros.
  Le cardinal de E est alors le nombre d'éléments de E.
- Un ensemble fini E de cardinal n peut s'écrire :

$$E = \{e_k \mid k \in \{1, ..., n\}\} \text{ avec : } \forall i \neq j, \quad e_i \neq e_j$$

- $\varnothing$ est un ensemble fini et $\text{card}(\varnothing) = 0$
- Si a et b sont deux entiers relatifs vérifiant $a \leqslant b$, alors :

$$\text{card}\left([\![a;b]\!]\right) = b - a + 1$$

Proposition :

Soient E et F deux ensembles finis,
E et F ont le même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre E et F.

6.2 Propriétés du cardinal.

Propositions : (*parties d'un ensemble fini*)

① Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini.
Soit E un ensemble fini et A et B deux parties de E,

② **Si** $A \subset B$ **alors** $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(B)$

③ $A \subset B$ et $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ **si, et seulement si,** $A = B$.

④ **Si** A et B sont deux parties disjointes de E (ie : $A \cap B = \varnothing$), **alors** :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Remarques :

• Si un ensemble contient une partie infinie, il est lui aussi infini.

• Si A est une partie d'un ensemble fini E, alors $\operatorname{card}(\overline{A}) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$

• $\operatorname{card}(B \setminus A) = \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$

Théorème : (*Réunion de parties deux à deux disjointes.*)

Si $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille de p parties deux à deux disjointes, alors

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{card}(A_i)$$

Remarque :

• Si $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une **partition** d'un ensemble B alors : $\operatorname{card}(B) = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{card}(A_i)$

Théorème : (*Réunion de deux ou trois parties quelconques.*)

• Si A et B sont deux parties de E, alors :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$$

• Si A, B et C sont trois parties de E, alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(A \cup B \cup C) &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) \\ &\quad - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(B \cap C) - \operatorname{card}(A \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Théorème : (*produit cartésien*)

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \times B$ est fini et :

$$\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(A)\operatorname{card}(B)$$

Proposition :

Si $(E_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est une famille de p ensembles finis, alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est fini et :

$$\operatorname{card}(E_1 \times \cdots \times E_p) = \operatorname{card}(E_1) \times \cdots \times \operatorname{card}(E_p)$$

Proposition :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et A un ensemble fini, l'ensemble A^p est fini et :

$$\operatorname{card}(A^p) = (\operatorname{card}(A))^p$$

Remarque :

$$A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois l'ensemble A}}$$

6.3 Dénombrement des ensembles classiques.

6.3.1 Ensemble des p-listes.

Définition :

On appelle p-listes d'un ensemble E, les éléments du produit cartésien E^p.

Notation : $\boxed{\text{Les listes sont notées : } (x_1, x_2, ..., x_p)}$, avec des parenthèses!!!

On rappelle que : $\quad (x_1, x_2, ..., x_p) = (x'_1, x'_2, ..., x'_p) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = x'_i$

Proposition :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n,
le nombre de p-listes E est égale à : n^p

Expérience classique qui amène des p-liste : *(Situation de référence)*
Dans un ensemble contenant n objets numérotés de 1 à n, on effectue p tirages **successifs, avec remise**. Les résultats de ces tirages, rangés dans l'ordre d'apparition, constituent une p-liste.

Le nombre de résultats différents de cette expérience est égale à n^p

C'est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n, avec d'éventuelles répétitions.

6.3.2 Ensemble des p-listes sans répétition (arrangements).

Dire qu'une p-liste $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est sans répétition signifie que

$$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$$

Remarque : on parle aussi de p-arrangement.

Proposition :

Etant donné deux entiers n et p strictement positifs ($p \leqslant n$) et E un ensemble de cardinal n.
Le nombre de p-listes sans répétition d'éléments de E est égal à : $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$.

Remarques :

Si $p > n$, alors il n'y pas de p-listes sans répétition d'éléments de E.

Le nombre de p-listes sans répétition de E est égal à : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ ou encore $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$

Expérience classique qui amène des p-liste sans répétition : *(Situation de référence)*
Soit n et p deux entiers non nuls.
Dans un ensemble contenant n objets numérotés de 1 à n, on effectue p tirages **successifs, sans remise**. Les résultats de ces tirages, rangés dans l'ordre d'apparition, constituent une p-listes sans répétition.

Le nombre de résultats différents de cette expérience est égal à $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$

C'est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n, sans répétition.

6.3.3 Nombre de permutations.

Définition

Soit E un ensemble fini, une liste contenant exactement une fois chaque élément de E est appelée une permutation de E.

Proposition

Si $\operatorname{card}(E) = n$ le nombre de permutations de E est égal à : $n!$.

Remarques :

Le nombre d'ordres que l'on peut donner aux n éléments de E est égal à $n!$.

C'est le nombre de façons de choisir successivement tous les objets d'un ensemble, sans répétition.

6.3.4 Nombre de combinaisons d'un ensemble fini.

Définition :

Soit p un entier naturel, une p-combinaison de E est un sous-ensemble (une partie) de E à p éléments.

Notations :

- On notera $\mathscr{P}_p(E)$ l'ensemble des p-combinaisons de E.

$$A \in \mathscr{P}_p(E) \iff (A \subset E \quad \text{et} \quad \text{card}(A) = p)$$

- Une combinaison s'écrit $\boxed{\left\{x_1, x_2, \ldots, x_p\right\}}$ (des accolades ! !) avec $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$

Remarque : Contrairement aux listes si on change l'ordre des éléments cela ne change pas la combinaison.

Proposition :

Etant donné deux entiers n et p tels que $p \leqslant n$ et E un ensemble de cardinal n. Le nombre de p-combinaisons est égal à : $\dfrac{1}{p!} \underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \dbinom{n}{p}$

Remarque : avec une p-combinaison on peut construire $p!$ listes sans répétition de p-éléments de E.

Expérience classique qui amène des p-combinaisons : *(Situation de référence)*
Soit n et p deux entiers non nuls.
Dans un ensemble contenant n objets numérotés de 1 à n, on effectue un tirage **simultané** de p objets.
Chaque résultat de ce tirage est une combinaison de p objets de l'ensemble.

Le nombre de résultats différents de cette expérience est égal à : $\dbinom{n}{p}$

6.3.5 Nombre de parties d'un ensemble fini.

Proposition :

Soit E un ensemble fini à n éléments, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et : $\text{card}\left(\mathscr{P}(E)\right) = 2^n$

6.4 Nombre d'anagrammes. *(Complément)*

Théorème des anagrammes.

Soit un "mot" $\mathcal{M}$ formé de p lettres distinctes $A_1, A_2, \cdots A_p$, la lettre A_1 apparaît n_1 fois, ... , la lettre A_p apparaît n_p fois.

La longueur de $\mathcal{M}$ vaut $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$.

Le nombre d'anagrammes de ce mot est égal à :

$$\frac{N!}{n_1!\, n_2! \,\cdots\, n_p!}$$

ou encore

$$\binom{N}{n_1}\binom{N-n_1}{n_2}\binom{N-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_{p-1}+n_p}{n_{p-1}}$$

6.5 Applications et cardinal. (outil 5)

6.5.1 Nombre d'applications entre deux ensembles finis.

Soit E de cardinal p et F de cardinal n, définir une application f de E dans F revient à donner la liste $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ des images des p éléments de E par f, pour chacun d'eux il y a n choix possibles.

$$\boxed{\text{Le nombre d'applications de } E \text{ dans } F \text{ est donc égal à } n^p}$$

6.5.2 Nombre d'injections entre deux ensembles finis.

Soit E de cardinal p et F de cardinal n, définir une injection f de E dans F revient à donner la liste sans répétition $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ des images des p éléments de E par f ; pour l'image de e_1 il y a n choix possibles, puis pour l'image de e_2, il y a $(n-1)$ choix possibles, ...

$$\boxed{\text{Le nombre d'injections de } E \text{ dans } F \text{ est donc égal à : } \underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}.}$$

6.5.3 Nombre de bijections entre deux ensembles finis.

Soit E de cardinal n et F de cardinal n, définir une bijection f de E dans F revient à donner la liste sans répétition $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ des images des n éléments de E par f ; pour l'image de e_1 il y a n choix possibles, puis pour l'image de e_2, il y a $(n-1)$ choix possibles, ...

$$\boxed{\text{Le nombre de bijections de } E \text{ dans } F \text{ est donc égal à : } n!.}$$

6.5.4 Conditions suffisantes sur les cardinaux.

Proposition :

Soit E et F deux ensembles finis,

S'il existe une injection de E dans F alors $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$

S'il existe une surjection de E dans F alors $\text{card}(E) \geqslant \text{card}(F)$

S'il existe une bijection de E dans F alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

6.5.5 Injections et ensembles finis.

Propositions :

Soit E et F deux ensembles quelconques,

En supposant qu'il existe une injection de E dans F :

- E est fini **si, et seulement si,** $f(E)$ est fini (et alors $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$)
- **Si** F est fini **alors** E est fini et $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$
- **Si** E est infini **alors** F est infini.

Soit E et F deux ensembles finis,

- **S**'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E
alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

6.5.6 Application entre deux ensembles de même cardinal.

Propositions :

Soit $f : E \to F$ avec E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

f est injective si, et seulement si, f est bijective.

f est surjective si, et seulement si, f est bijective.

6.6 Somme sur un ensemble fini.

Définition, notation :

Soient E un ensemble fini, tel que $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ avec $\text{card}(E) = n$
et f une application de E dans F avec F un ensemble muni d'une somme.

On note : $$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)$$

Propositions :

Soit E un ensemble fini,

❶ Si A_1, A_2 , ..., A_p forment une partition de E alors :

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{x \in A_k} f(x) \right)$$

❷ Si σ est une bijection de E dans E,

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{x \in E} f(\sigma(x))$$

On ne change pas la somme si on modifie l'ordre dans lequel on fait la somme.

❸ $\text{card}(E) = \sum_{x \in E} 1$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{x \in E} \lambda = \lambda \, \text{card}(E)$

❹ Soit A une partie de E,

$$\text{card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$