Devoir à faire avant la rentrée.

Ce devoir doit orienter vos révisions, vous devez le faire avant la rentrée. Une correction vous sera distribuée fin août.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.*

Les réponses devront être justifiées sans calculatrice.

Ce devoir est composé de 7 exercices indépendants.

Exercice 1

Liste de questions très classiques dans votre filière.

1. Montrer que pour tout $p \in [0,1]$, $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\quad \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{1}{2}(x+y)$.
4. Déterminer pour $a \in \mathbb{R}$ la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :
$$u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x-2| \leqslant \dfrac{1}{3}$
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
7. Calculer en fonction de l'entier naturel n la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$.
8. Soit $p \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\forall j \in [\![0,p]\!]$, $\quad \dbinom{p}{j}\dfrac{1}{1+j} = \dbinom{p+1}{j+1}\dfrac{1}{p+1}$.
   (b) Montrer que $\forall j \in [\![0,p-1]\!]$, $\quad \dbinom{p+1}{j+1} = \dbinom{p}{j+1} + \dbinom{p}{j}$.
9. Justifier que : $\quad \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
10. Démontrer que : $\quad \ln(x+1) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$
11. (a) Déterminer les variations de $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{x}$ sur $]0;+\infty[$.
   (b) En déduire que pour tout entier k supérieur ou égal à 2,
$$\int_k^{k+1} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e^{-k}}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$
12. Montrer que la famille $(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0))$ est libre.

Pour les questions 13. et 14. on ne démontrera pas que : $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{R}), \quad (AB)^T = B^T A^T$.

13. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est inversible alors A^T est inversible et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
14. Soient n et p deux entiers naturels non nuls : $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
    (a) Quel est le nombre de lignes et de colonnes de la matrice $A^T A$?
    (b) Montrer que $A^T A$ est une matrice symétrique.
15. Déterminer toutes les matrices $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
16. On a cinq jetons et quatre urnes ; on met successivement chacun des cinq jetons dans une des quatre urnes (*les urnes peuvent contenir les cinq jetons*).
    On note X_1 le nombre de jetons dans la première urne et X_2 le nombre de jetons dans la deuxième.
    (a) Quelle est la loi de X_1 ? son espérance et sa variance ?
    (b) Quelle est la loi de $X_1 + X_2$? son espérance et sa variance ?
17. On lance dix fois un dé équilibré.
    (a) Quelle est la probabilité d'avoir que des ❻ ?
    (b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un ❻ ?
18. On lance deux dés et on note X la somme des deux nombres obtenus.
    Calculer $P(X = 6)$ et $P(X \leqslant 3)$.
19. Ecrire une fonction Python ayant pour argument une liste `L` de nombres et qui renvoie le maximum de ses éléments.
20. Ecrire une fonction Python qui simule la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, p). *(n et p étant des arguments de la fonction)*

– –

Exercice 2

Prérequis : Calcul d'intégrales, inbtégration par parties, formules de trigonométrie, suites réelles, raisonnement par récurrence, suites équivalentes.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.
2. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n.$$
3. Par intégration par parties, démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$
   Indication : On remarquera que $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)\ \mathrm{d}t.$
4. À l'aide d'une démonstration par récurrence, en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$
5. En utilisant 2. et 3. , démontrer que $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} W_{n-1}$ et en déduire que :
$$W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 3

Prérequis : Espaces vectoriels, applications linéaires, systèmes linéaires, injectivité des application linéaires, matrice d'une application linéaire dans des bases.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
2. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$
3. f est-elle injective ? surjective ?
4. Montrer que $\mathscr{B} = ((2,1,0),(1,0,1),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

(On utilisera la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base)

— —

Exercice 4

Prérequis : Etude de fonction, dérivabilité, théorème des gendarmes, théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection continue, théorème des accroissements finis, raisonnement par récurrence, théorème de convergence monotone.

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie par : $\quad u_0 = \dfrac{1}{2} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$

1. Soit f l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.
   (a) Etudier le sens de variations de f, quelle est l'image du segment $[0,1]$ par f.
   (b) Etudier le sens de variations de f' puis montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$, on a : $\dfrac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.
   (c) Etablir que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0,1]$, on note α cette solution.
   (d) Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $[0,1]$.
   (e) Faire une figure avec la représentation graphique de f et la droite d'équation $y = x$.
2. *Convergence de la suite.*
   (a) Montrer que $f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, que $f\big([0,\alpha]\big) \subset [0,\alpha]$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,\alpha]$.
   (b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
   (c) Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}\,|u_n - \alpha|$.
   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

— —

Exercice 5

Prérequis : Equations différentielles, fonctions polynomiales, représentations graphiques avec Python.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'(x) + xy(x) = x^3$$

1. Montrer que si P est une solution polynomiale de (E) alors $\deg(P) = 2$.
2. Déterminer l'unique solution polynomiale de (E).
3. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation homogène associée à (E).
4. Déterminer la solution y de (E) vérifiant $y(0) = 0$.
5. Ecrire un programme Python permettant de tracer sur $[-2,2]$ les solutions y_k de (E) vérifiant $y_k(0) = k$, pour k un entier compris entre -5 et 5.
   Indication : On ne demande pas ici d'utiliser la méthode d'Euler, mais d'utiliser l'expression de chaque y_k.

Exercice 6

Prérequis : Evénements, probabilités, formule des probabilités totales, formule des probabilités composées, suites usuelles, calcul sur les fractions.

Une urne A contient 4 boules rouges et 1 verte, une urne B contient 3 boules rouges et 7 vertes
On choisit équiprobablement une urne et on enchaine les tirages avec remise de sorte que :
- Si on tire une boule rouge on enchaine avec l'urne B.
- Si on tire une boule verte on enchaine avec l'urne A.

On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, R_n l'événement : "la n ème boule tirée est rouge" et $p_n = P(R_n)$.

1. Calculer la probabilité p_1.
2. Déterminer la probabilité que les n premiers tirages donnent une boule rouge.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,
$$p_{n+1} = -\frac{1}{2} p_n + \frac{4}{5}$$
4. Déterminer en fonction de n, p_n et la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$.
5. Déterminer la limite de (p_n) et de (S_n).

Exercice 7

Prérequis : Calcul matriciel, matrice inversible, suites usuelles, raisonnement par récurrence, suites usuelles.

On note M la matrice :
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.
2. Exprimer M^2 comme une combinaison linéaire des matrices I_3 et M.
   En déduire qu'il existe deux suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad M^k = u_k I_3 + v_k M$$
   (*On admettra l'unicité de ces deux suites*)
3. Donner u_0, u_1, v_0, v_1 et montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$u_{k+2} = -2u_{k+1} + 3u_k \qquad \text{et} \qquad v_{k+2} = -2v_{k+1} + 3v_k$$
4. Expliciter u_k, v_k en fonction de k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$M^k = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 - (-3)^k & 2\left((-3)^k - 1\right) & 1 - (-3)^k \\ 2\left(1 - (-3)^k\right) & 4(-3)^k & 2\left(1 - (-3)^k\right) \\ (-3)^k - 1 & 2\left(1 - (-3)^k\right) & (-3)^k + 3 \end{pmatrix}$$