Correction du devoir de rentrée.

Exercice 1

1. *Plusieurs approches possibles.*

Réponse 1 :

$P : x \longmapsto x(1-x)$ est un trinôme de racines 0 et 1 et qui atteint son maximum en $\dfrac{1}{2}$.

de plus $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ donc $\boxed{\text{pour tout } p \in [0,1],\ \ p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}}$

Réponse 2 :

Pour $p \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} p(1-p) \leqslant \frac{1}{4} &\iff 4p - 4p^2 \leqslant 1 \\ &\iff 4p^2 - 4p + 1 \geqslant 0 \\ &\iff (2p-1)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

or pour tout réel p, $(2p-1)^2 \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{pour tout } p \in [0,1],\ \ p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}}$

Réponse 3 :

Soit $p \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - p(1-p) &= \frac{1}{4} - p + p^2 \\ &= \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \quad \geqslant 0 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } p \in [0,1],\ \ p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}}$

Remarque : *cette inégalité est utilisée dans le cours de probabilité/statistiques lorsqu'on étudie par exemple les intervalles de confiance à 95% d'une proportion* :

$$\left[f - 1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{n}\ ;\ f + 1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{n}\right] \qquad f \textit{ est la fréquence observée sur un échantillon de taille } n$$

Voir aussi la fin du sujet MMI 2024

2. *Ici aussi on peut avoir plusieurs approches* :

Réponse 1 :

L'étude sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$ montre qu'elle admet un minimum en 1

En effet, cette fonction est dérivable et $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

f possède bien un minimum en 1.

de plus $f(1) = 2$ donc $\boxed{\text{pour tout } x \in]0;+\infty[\ ,\ \ x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2}$

Réponse 2 :

Pour $x > 0$,

$$\begin{array}{rcll} x+\dfrac{1}{x} \geqslant 2 & \iff & x^2+1 \leqslant 2x & \textit{(car } x>0\textit{)} \\ & \iff & x^2-2x+1 \geqslant 0 & \\ & \iff & (x-1)^2 \geqslant 0 & \end{array}$$

or pour tout réel $x > 0$, $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2}$

Réponse 3 :

Soit $x \in]0;+\infty[$,

$$\begin{array}{rcll} x+\dfrac{1}{x}-2 & = & \dfrac{1}{x}(x^2+1-2x) & \\ & = & \dfrac{1}{x}(x-1)^2 \quad \geqslant 0 & \textit{(car } x>0\textit{)} \end{array}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2}$

3. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{2}(x+y)-\sqrt{xy} & = & \dfrac{1}{2}\left(x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \end{array}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } (x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2, \quad \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{1}{2}(x+y)}$

4. **1er cas** : Pour $a \neq 0$,

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)\right)$ (1),

or $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{n} = 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{n}$,

on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) = a$; et comme $\lim\limits_{x\to a} e^x = e^a$, on peut conclure en reprenant (1) que :

(u_n) converge vers e^a.

2ième cas : Pour $a = 0$,

(u_n) est la suite constante égale à 1 et $e^0 = 1$

(u_n) converge vers e^a.

En conclusion :

$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } e^a}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} |x-2| \leqslant \dfrac{1}{3} & \iff & -\dfrac{1}{3} \leqslant x-2 \leqslant \dfrac{1}{3} \\ & \iff & 2-\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2+\dfrac{1}{3} \\ & \iff & \dfrac{5}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{7}{3} \end{array}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de cette inéquation est : } S = \left[\dfrac{5}{3}\ ;\ \dfrac{7}{3}\right]}$

6. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On note $P(n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

① pour $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$$

La propriété $P(0)$ est vraie.

② Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \qquad \textit{(avec l'hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}
\end{aligned}$$

or $(n+2)(2(n+1)+1) = (2n^2+7n+6)$ donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

on a montré que **si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ l'est aussi .**

En conclusion de ① et ②:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

7. On reconnait une somme géométrique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{n} q^k$ avec $q = \dfrac{1}{2}$.

or pour $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k = q\,\frac{1-q^n}{1-q}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 - \frac{1}{2^n}}$$

8. Soit $p \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $j \in [\![0, p]\!]$,

$$\begin{aligned}
\binom{p+1}{j+1} \cdot \frac{1}{p+1} &= \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p-j)!} \cdot \frac{1}{p+1} \\
&= \frac{(p+1)\cdot p!}{(j+1)\cdot j!\,(p-j)!} \cdot \frac{1}{p+1} \\
&= \frac{1}{j+1} \cdot \binom{p}{j}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } j \in [\![0, p]\!], \quad \binom{p}{j} \cdot \frac{1}{j+1} = \binom{p+1}{j+1} \cdot \frac{1}{p+1}}$$

(b) Soit $j \in [\![0, p-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\binom{p}{j+1} + \binom{p}{j} &= \frac{p!}{(j+1)!\,(p-j-1)!} + \frac{p!}{j!\,(p-j)!} \\
&= \frac{p!\,(p-j)}{(j+1)!\,(p-j)!} + \frac{p!\,(j+1)}{(j+1)!\,(p-j)!} \\
&= \frac{p!\,(p+1)}{(j+1)!\,(p-j)!} \\
&= \binom{p+1}{j+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } j \in [\![0, p-1]\!], \quad \binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}}$$

9. Pour $n \geqslant 2$, $\quad \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left(n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

or $\quad \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad$ et $\quad \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad$ donc $\quad \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

$$\boxed{\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

10. On note f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $\; f(x) = x - \ln(x+1)$,

cette fonction est dérivable et sur $]-1; +\infty[\;$ $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$,

On en déduit le signe de $f'(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Ce qui montre que f admet un minimum global en 0 qui vaut $f(0) = 0$,
ce qui montre que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x ou encore :

$$\boxed{\ln(x+1) \leqslant x \text{ pour tout } x \in]-1; +\infty[}$$

11. (a) On note $\; f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{x}$,

f est dérivable sur $]0; +\infty[\;$ et $\; f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x} - \dfrac{e^{-x}}{x^2} < 0$

donc $\quad \boxed{x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{x} \text{ est strictement décroissante sur }]0; +\infty[}$

(b) Soit k un entier supérieur ou égal à 2, *(dans l'énoncé original il y avait une erreur)*
f est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc :

$$\forall x \in [k-1; k], \quad f(k) \leqslant f(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [k; k+1], \quad f(x) \leqslant f(k)$$

donc

$$\int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k}^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x$$

et comme $f(k) = \dfrac{e^{-k}}{k}$ il vient :

$$\frac{e^{-k}}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e^{-k}}{k}$$

donc

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e^{-k}}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x}$$

12. On note $(u, v, w) = (1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0))$.

    Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
au + bv + cw = (0,0,0,0) &\iff a(1,0,1,1) + b(1,1,0,1) + c(1,1,1,0) = (0,0,0,0)\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 0\\ \quad\; b+c & = & 0\\ a \quad\; +c & = & 0\\ a+b & = & 0 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 0\\ b & = & 0\\ c & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La famille } \Big((1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\Big) \text{ est libre}}$$

13. On suppose que A est inversible et on note B la matrice $\left(A^{-1}\right)^T$
    On a :

$$A^T B = A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = {I_n}^T = I_n \quad \text{et} \quad BA^T = \left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(A\,A^{-1}\right)^T = {I_n}^T = I_n$$

donc A^T est inversible et $\left(A^T\right)^{-1} = B$

$$\boxed{\text{si } A \text{ est inversible alors } A^T \text{ est inversible et } \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T}$$

14. (a) $A^T \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ donc $\boxed{A^T A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})}$
    (b) On note $B = A^T A$,

$$B^T = \left(A^T A\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T = A^T A = B$$

$$\boxed{A^T A \text{ est une matrice symétrique}}$$

15. Soit $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 6 & 5 & 4\\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 0\\ 6x+5y+4z & = & 0\\ 7x+8y+9z & = & 0 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+3z & = & 0 & \\ -7y-14z & = & 0 & \quad (L_2 \to L_2 - 6L_1)\\ -6y-12z & = & 0 & \quad (L_3 \to L_3 - 7L_1) \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+3z & = & 0 & \\ y+2z & = & 0 & \quad (L_2/(-7) \to L_2)\\ y+2z & = & 0 & \quad (L_3/(-6) \to L_3) \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & z\\ y & = & -2z \end{array}\right.\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha\\ y & = & -2\alpha\\ z & = & \alpha \end{array}\right.\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

16. *(Ici il y avait une erreur dans l'énoncé original)*

(a) Cette expérience est la succession de 5 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, (succès : "le jeton est dans la première urne" de probabilité $\dfrac{1}{4}$)

X_1 est le nombre de succès donc

$$\boxed{X_1 \text{ suit la loi binomiale } \mathscr{B}(5, \tfrac{1}{4})}$$

Il s'agit d'une loi usuelle :

$$\boxed{E(X_1) = \frac{5}{4} \qquad \text{et} \qquad V(X_1) = \frac{15}{16}}$$

(b) Cette expérience est la succession de 5 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, (succès : "le jeton est dans la première ou la deuxième urne" de probabilité $\dfrac{1}{2}$)

$X_1 + X_2$ est le nombre de succès donc

$$\boxed{X_1 + X_2 \text{ suit la loi binomiale } \mathscr{B}(5, \tfrac{1}{2})}$$

Il s'agit d'une loi usuelle :

$$\boxed{E(X_1 + X_2) = \frac{5}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X_1 + X_2) = \frac{5}{4}}$$

17. On note S_k l'événement : "Le $k^{\text{ième}}$ lancer donne un ❻ ".

(a) On veut la probabilité de l'événement, $E = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{10}$
les lancers sont indépendants donc $P(E) = P(S_1) \times P(S_2) \times \cdots \times P(S_{10})$
or pour tout k, $P(S_k) = \dfrac{1}{6}$

$$\boxed{\text{La probabilité d'avoir que des ❻ est égale à } \frac{1}{6^{10}}}$$

(b) On veut la probabilité de $G = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{10}$ et on remarque que $\overline{G} = \overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \cdots \cap \overline{S}_{10}$

or $P(\overline{G}) = P(\overline{S}_1) \times P(\overline{S}_2) \times \cdots \times P(\overline{S}_{10}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{10}$ *(indépendance des lancers)*

donc

$$\boxed{\text{la probabilité d'obtenir au moins un ❻ est égale à } 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}}$$

18. Il s'agit d'une expérience usuelle modélisée par l'univers $\Omega = [\![1;6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme ($\text{card}(\Omega) = 36$).

$(X = 6)$ est l'événement $\{(1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1)\}$ donc $\text{card}(X = 6) = 5$ et ainsi $\boxed{P(X = 6) = \dfrac{5}{36}}$

$(X \leqslant 3)$ est l'événement $\{(1,1); (1,2); (2,1)\}$ donc $\text{card}(X \leqslant 3) = 3$ et ainsi $\boxed{P(X \leqslant 3) = \dfrac{1}{12}}$

19.
```
def maximum(L):
    m = L[0]
    for k in range(1, len(L)):
        if  L[k] > m:                 # m est à la fin de chaque boucle le max de L[0: k+1]
            m = L[k]
    return m
```

20.
```
import random as rd

def binomiale(n, p):
    x = 0
    for k in range(n):
        if  rd.random() < p:    # x est la somme de n variables de Bernoulli id. et ind.
            x += 1
    return x
```

Exercice 2

1. $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{W_0 = \dfrac{\pi}{2}}$, $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$ donc $\boxed{W_1 = 1}$

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(En utilisant la formule } \cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 \textit{)} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{W_2 = \frac{\pi}{4}}$$

2. $\forall t \in \big[0; \frac{\pi}{2}\big]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$ et $\cos^n(t) \geqslant 0$ donc $\forall t \in \big[0; \frac{\pi}{2}\big]$, $0 \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)$

or toutes ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n}$$

3. On fixe $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x) \times \cos(x)\,dx \\ &= \Big[\cos^{n+1}(x) \times \sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin(x))\cos^n(x) \times \sin(x)\,dx \\ &\qquad x \mapsto \cos^{n+1}(x) \textit{ et } x \mapsto \sin(x) \textit{ sont de classe } C^1 \textit{ sur } \Big[0; \frac{\pi}{2}\Big] \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \times \sin^2(x)\,dx \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \times (1 - \cos^2(x))\,dx \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,W_n}$$

4. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

- Pour $n = 1$,

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}x = \Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \qquad \text{on a bien : } 1\,.W_1.W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\,W_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} (n+1)W_{n+1}W_n &= nW_{n-1}W_n \qquad \textit{d'après 3.} \\ &= \frac{\pi}{2} \qquad \textit{avec l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

on obtient bien la relation au rang $n+1$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}}$$

5. (W_n) est décroissante *(d'après 2.(a))* donc $W_n \leqslant W_{n-1}$ et $W_{n-1} \leqslant W_{n-2}$

   et *(d'après 3.)* donc $W_{n-2} = \dfrac{n}{n-1} W_n$ il vient :

$$W_n \leqslant W_{n-1} \leqslant \frac{n}{n-1} W_n \qquad \text{ou encore } (\textit{car } W_n > 0) \qquad 1 \leqslant \frac{W_{n-1}}{W_n} \leqslant \frac{n}{n-1}$$

   Sachant que $\dfrac{n}{n-1} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, le théorème des gendarmes permet de conclure

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}}$$

   $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}$ donc $nW_nW_{n-1} \sim nW_n^2$ or (d'après 4.) $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$

   il vient : $nW_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$ et enfin comme $W_n \geqslant 0$ on peut en conclure :

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Exercice 3

1. Soit $u = (x, y, z)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathrm{Ker}(f)$ si, et seulement si, $f(u) = (0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned}
f(u) = (0,0,0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & 0 \\ x - 2y & = & 0 \\ -x + 2y + z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & 0 \\ z & = & 0 \\ 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect} < (2,1,0) >
\end{aligned}$$

$$\boxed{((2,1,0)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f)}$$

2. On sait que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect} < f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1)) >$ *(image de la base canonique)*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect} < f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1)) > \; &= \; \mathrm{Vect} < \overbrace{(1,1,-1)}^{u}, \overbrace{(-2,-2,2)}^{v}, \overbrace{(1,0,1)}^{w} > \\
&= \; \mathrm{Vect} < (1,1,-1), (1,0,1) > \qquad \text{car } v = 2u
\end{aligned}$$

   de plus $((1,1,-1),(1,0,1))$ est une famille libre. *(deux vecteurs non colinéaires)*, donc

$$\boxed{((1,1,-1),(1,0,1)) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$$

   Remarque : on peut vérifier l'égalité donnée par le théorème du rang : dim(ker(f) + dim(Im(f) = dim($\mathbb{R}^3$)

3. $\mathrm{Ker}(f) \neq \{(0,0,0)\}$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$ et $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$

4. $\mathscr{B}$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *(de dimension* 3*)* il suffit donc de montrer sa liberté.
   Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
a(2,1,0) + b(1,0,1) + c(0,0,1) = (0,0,0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2a + b & = & 0 \\ a & = & 0 \\ b + c & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad a = b = c = 0
\end{aligned}$$

   donc $((2,1,0),(1,0,1),(0,0,1))$ est une famille libre.

   En conclusion :

$$\boxed{\mathscr{B} = ((2,1,0),(1,0,1),(0,0,1)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

5. On note $(u_1, u_2, u_3) = ((2,1,0),(1,0,1),(0,0,1))$ $(= \mathscr{B})$
on remarque que :
$$f(u_1) = (0,0,0)\ ,\quad f(u_2) = u_1 \quad \text{et} \quad f(u_3) = u_2$$
donc
$$\mathrm{coord}_{\mathscr{B}}(f(u_1)) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathrm{coord}_{\mathscr{B}}(f(u_2)) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{coord}_{\mathscr{B}}(f(u_3)) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
et ainsi la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

Exercice 4

1. (a) $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x+2}$ est dérivable sur $[0,1]$ *(quotient de deux fonctions dérivables)*
et pour tout $x \in [0,1]$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} \quad (>0 \ \text{ sur } [0,1]\ ) \end{aligned}$$
donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0,1]}$

f est continue et croissante sur $[0,1]$ donc $f([0,1]) = [f(0), f(1)]$, de plus $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \dfrac{e}{3}$ donc
$$\boxed{f([0,1]) = \left[\frac{1}{2}\ ;\ \frac{e}{3}\right]}$$

(b) $f' : x \longmapsto \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} = e^x(x+1) \times \dfrac{1}{(x+2)^2}$ est dérivable sur $[0,1]$ *(produit de deux fonctions dérivables)*
et pour tout $x \in [0,1]$,
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^x(x+1) + e^x}{(x+2)^2} - 2\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^3} \\ &= \frac{e^x(x+2)^2 - 2e^x(x+1)}{(x+2)^3} \\ &= \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3} \qquad (>0 \text{ sur } [0,1]\ ) \end{aligned}$$
donc
$$\boxed{f' \text{ est strictement croissante sur } [0,1]}$$

f' est croissante sur $[0,1]$ donc $\forall x \in [0,1],\quad f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1)$, de plus $f'(0) = \dfrac{1}{4}$ et $f'(1) = \dfrac{2e}{9}$ et $e \leqslant 3$ donc
$$\boxed{\text{pour tout réel } x \in [0,1], \text{ on a : } \ \frac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{3}}$$

(c) Notons $h : x \longmapsto f(x) - x$ (ainsi $f(x) = x \iff h(x) = 0$).
h est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, $h'(x) = f'(x) - 1$ $(<0$ d'après 1. (b))
Rédaction 1 ;
h est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$ et $h(0) = \dfrac{1}{2} > 0$, $h(1) = f(1) - 1 < 0$ d'après 1.(a)
donc h s'annule une et une seule fois sur $[0,1]$.

Autrement dit : $\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet une solution unique dans l'intervalle } [0,1]}$

Rédaction 2 (vue en classe) :
h est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,1]$ donc *(Théorème de la bijection)*

$$h \text{ est bijective de } [0,1] \text{ dans } [h(1),h(0)] = \left[\frac{e}{3}-1;\frac{1}{2}\right]$$

or $e<3$ donc $0 \in \left[\frac{e}{3}-1;\frac{1}{2}\right]$ donc *(définition d'une bijection)*,

$$\text{il existe un unique } \alpha \in [0,1] \text{ tel que } h(x)=0$$

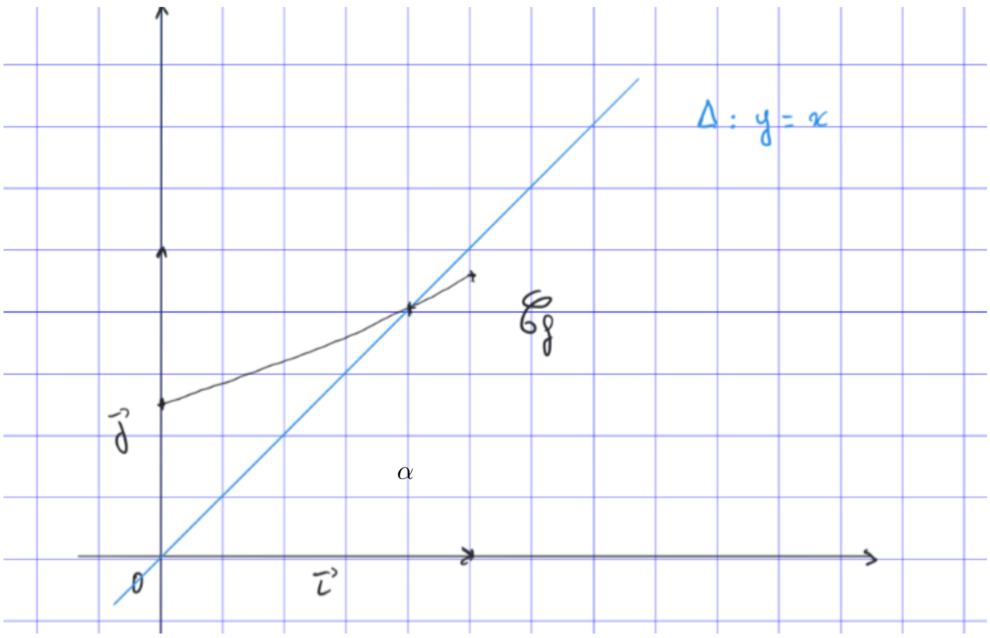
Autrement dit : $\boxed{\text{l'équation } f(x)=x \text{ admet une solution unique dans l'intervalle } [0,1]}$

Remarque : cette solution α appartient à $]0,1[$.

(d) L'étude précédente montre que $x \longmapsto f(x)-x$ est strictement décroissante sur $[0,1]$ et s'annule en α, on peut en déduire le signe de $f(x)-x$:

x	0	α	1
$f(x)-x$	$+$	0	$-$

(e)



2. (a) On a montré en 1.(a) que $f([0,1]) = \left[\frac{1}{2};\frac{e}{3}\right]$, cela entraine en particulier que $f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}$

or $u_0 = \frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{f(u_0)-u_0 \geqslant 0}$$

Ce résultat est suffisant pour la suite de l'étude mais l'énoncé en demandait plus.

$$\begin{aligned} f(u_0)=u_0 &\iff \frac{2\sqrt{e}}{5}=\frac{1}{2} \\ &\iff e=\frac{25}{16} \quad \text{(Faux)} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{f(u_0)-u_0>0}$$

f est croissante sur $[0,\alpha]$ donc $f\big([0,\alpha]\big) \subset [f(0),f(\alpha)]$,

de plus $f(0) \geqslant 0$ et $f(\alpha)=\alpha$ donc

$$\boxed{f\big([0,\alpha]\big) \subset [0,\alpha]}$$

Montrons, par récurrence sur n, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, \alpha]$.

- *(Initialisation)* Pour $n = 0$

  On a vu en 1.a que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $f(\alpha) \geqslant \dfrac{1}{2}$

  $$\text{or } u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } f(\alpha) = \alpha \quad \text{donc} \quad u_0 \in [0, \alpha] \qquad (*)$$

- *(Hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [0, \alpha]$,

  (*On prend un entier n quelconque et on suppose que la propriété est vraie à ce rang n*)

  on sait que $u_n \in [0, \alpha]$ et on a montré que $f\big([0, \alpha]\big) \subset [0, \alpha]$ donc $f(u_n) \in [0, \alpha]$

  or $u_{n+1} = f(u_n)$ donc

  $$u_{n+1} \in [0, \alpha]$$

En conclusion *(de ce raisonnement par récurrence)* :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, \alpha]}$$

(b) On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, \alpha]$ et $f(x) - x \geqslant 0$ sur $[0; \alpha]$ donc $f(u_n) - u_n \geqslant 0$,

or $\quad u_{n+1} = f(u_n) \quad$ donc $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par α donc (u_n) est convergente. *(vers un réel $\ell \in [u_0, \alpha]$)*

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue sur $[0, 1]$ donc en passant à la limite il vient : $\ell = f(\ell)$.

Or on a montré que α est l'unique solution sur $[0, 1]$ de l'équation $f(x) = x$ donc

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \alpha}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

f est dérivable sur $[0, 1]$, u_n et α appartiennent à $[0, 1]$ donc *(théorème des accroissements finis)*

il existe $c \in [0, 1]$ tel que $|f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)|.|u_n - \alpha|$,

or $\quad u_{n+1} = f(u_n), \quad \alpha = f(\alpha) \quad$ et $\quad |f'(c)| \leqslant \dfrac{2}{3}$ *(d'après 1 (d))*.

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3} |u_n - \alpha|}$$

(d) Montrons, par récurrence sur n, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

- *(Initialisation)*

  d'une part on sait que u_0 et α appartiennent à $[0, 1]$ donc $|u_0 - \alpha| \leqslant 1$

  d'autre part $\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = 1$

  $$\text{donc} \qquad |u_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

- *(Hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$,

  on sait que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et on a montré que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3} |u_n - \alpha|$ donc

  $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

En conclusion *(de ce raisonnement par récurrence)* :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$*$. merci Nathan

Exercice 5

1. Soit P un polynôme solution de (E),
   Le polynôme nul n'est pas solution donc $P \neq 0$, on note $n =$deg(P).
   on a alors : $\deg(P') < n+1$ et $x \longmapsto xP(x)$ est de degré $n+1$,

   donc $x \longmapsto P'(x) + xP(x)$ est de degré $n+1$,

   et comme $P'(x) + xP(x) = x^3$ on a $n+1 = 3$ ou encore $n = 2$

   $$\boxed{\text{si } P \text{ est une solution polynomiale de } (E) \text{ alors } \deg(P) = 2}$$

2. *D'après 1) il suffit de chercher une solution polynomiale de degré 2.*

   Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ on note $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$

   $$\begin{aligned} P'(x) + xP(x) = x^3 &\iff 2ax + b + ax^3 + bx^2 + cx = x^3 \\ &\iff ax^3 + bx^2 + (2a+c)x + b = x^3 \end{aligned}$$

   donc

   $$\begin{aligned} P \text{ solution de } (E) &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ 2a+c & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & -2 \end{array} \right. \\ &\iff P : x \longmapsto x^2 - 2 \end{aligned}$$

   $$\boxed{(E) \text{ possède une unique solution polynomiale : } x \longmapsto x^2 - 2}$$

3. On note $(E_0) : y'(x) + a(x)y(x) = 0$, avec $a(x) = x$.
   La fonction a est continue sur $\mathbb{R}$ et $A : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}$.

   $$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_0) \text{ est } \left\{ x \longmapsto c.e^{-\frac{x^2}{2}} \mid c \in \mathbb{R} \right\}}$$

4. Les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto c.e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$ pour chaque réel c.
   et $y(0) = 0$ entraine $c - 2 = 0$ donc

   $$\boxed{\text{la solution de } (E) \text{ vérifiant } y(0) = 0 \text{ est la fonction } x \longmapsto 2.e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2}$$

5. la solution de (E) vérifiant $y(0) = k$ est la fonction $x \longmapsto (k+2).e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$, ce qui permet de tracer les courbes attendues avec les programmes suivants :

   Il est important de savoir aussi tracer une courbe sans numpy.

   - sans `numpy` :

   ```
   from math import exp
   import matplotlib.pyplot as plt

   x = [- 2 + 4*i/100 for i in range(101) ]
   for k in range(-5, 6):
       y = [ (k+2)*exp(-t**2) + t**2 - 2 for t in x ]
       plt.plot(x, y)
   plt.show()
   ```

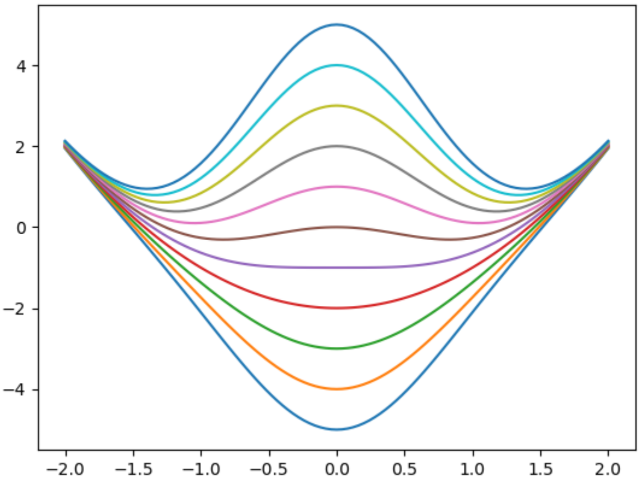
Vous avez surement vu une autre approche avec numpy.

- avec `numpy` :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-2, 2)
for k in range(-5, 6):
    y = (k+2)*np.exp(-x**2) + x**2 - 2      # Ici x et y sont des tableaux numpy
    plt.plot(x, y)                           # Il faut faire attention aux objets
plt.show()                                   # manipulés.
```

Quelle que soit la méthode on obtient les courbes suivantes :



Exercice 6

1. On note A_1 le premier tirage se fait dans l'urne A et B_1 le premier tirage se fait dans l'urne B.
La formule des probabilités totales avec le système complet (A_1, B_1) donne :
$$P(R_1) = P(A_1)P_{A_1}(R_1) + P(B_1)P_{B_1}(R_1)$$
avec les données de l'énoncé cela donne : $P(R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10}$
$$\boxed{p_1 = \frac{11}{20}}$$

2. La formule des probabilités composées donne :
$$P(R_1 \cap ... \cap R_n) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times P_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times \cdots \times P_{R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1}}(R_n)$$
or quand on obtient une boule rouge le tirage suivant se fait dans l'urne B donc
$$P(R_1 \cap ... \cap R_n) = P(R_1) \times \underbrace{\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \cdots \times \frac{3}{10}}_{n-1 \text{ facteurs}}$$
$$\boxed{\text{la probabilité que les } n \text{ premiers tirages donnent une boule rouge vaut } \frac{11}{20}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}}$$

3. La formule des probabilités totales avec le système complet $(R_n, \overline{R_n})$ donne :
$$P(R_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n})P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$$
Or : si R_n est réalisé alors le tirage $n+1$ se déroule dans l'urne B donc $P_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{3}{10}$

si $\overline{R_n}$ est réalisé alors le tirage $n+1$ se déroule dans l'urne A donc $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \frac{4}{5}$

donc $P(R_{n+1}) = p_n.\frac{3}{10} + (1 - p_n).\frac{4}{5}$ ce qui donne bien :
$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } p_{n+1} = -\frac{1}{2}\, p_n + \frac{4}{5}}$$

4. *On reconnait une suite arithmético-géométrique.*

- $\ell = -\frac{1}{2}\ell + \frac{4}{5} \iff \ell = \frac{8}{15}$
- $\ell = -\frac{1}{2}\ell + \frac{4}{5}$ et $p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{4}{5}$ entrainent $p_{n+1} - \ell = -\frac{1}{2}(p_n - \ell)$

ce qui entraine que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = (p_1 - \ell)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ell$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{1}{60}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{8}{15}}$$

$$\begin{aligned}
S_n = & \sum_{k=1}^{n} p_k \\
= & \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{60}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{8}{15}\right) \\
= & \frac{1}{60}\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}} + \frac{8n}{15}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{90}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \frac{8n}{15}}$$

5. Sachant que $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$ on sait que $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

   Ce qui permet de donner les limites des deux suites :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{8}{15} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$$

Exercice 7

1.

$$\begin{aligned}
(M - I_3)(M + 3I_3) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{(M - I_3)(M + 3I_3) = 0_3}$$

En développant on obtient la relation : $M^2 + 2M - 3I_3 = 0_3$ ce qui donne :

$$M\left(\frac{1}{3}(M + 2I_3)\right) = I_3 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{3}(M + 2I_3)\right)M = I_3$$

Donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{3}(M + 2I_3)$

or

$$M + 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M \text{ est inversible} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

2. Le relation obtenue en 1) : $M^2+2M-3I_3=0_3$ donne :

$$\boxed{M^2=3I_3-2M}$$

Montrons, par récurrence sur k, que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\underbrace{\text{il existe deux réels } u_k \text{ et } v_k \text{ tels que : } \quad M^k=u_kI_3+v_kM}_{\mathscr{P}(k)}$

(Initialisation) Pour $k=0$,

En prenant $u_0=1$ et $v_0=0$, on a bien : $M^0=u_0I_3+v_0M$

donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

(Hérédité) Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie,

On a : $M^k=u_kI_3+v_kM$ donc en multipliant par M on obtient $M^{k+1}=u_kM+v_kM^2$,

et comme $M^2=3I_3-2M$, il vient : $M^{k+1}=3v_kI_3+(u_k-2v_k)M$,

en prenant $u_{k+1}=3v_k$ et $v_{k+1}=u_k-2v_k$, on a bien : $M^{k+1}=u_{k+1}I_3+v_{k+1}M$

donc la propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

(Ce qui achève cette hérédité)

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N}, \text{ il existe deux réels } u_k \text{ et } v_k \text{ tels que : } \quad M^k=u_kI_3+v_kM}$$

3. $M^0=I_3=1.I_3+0.M$ et $M^1=M=0.I_3+1.M$ et les $u_k,\ v_k$ sont uniques donc

$$\boxed{u_0=1,\ u_1=0,\ v_0=0,\ v_1=1}$$

$M^2=3I_3-2M$ donc *(en multipliant par M^k)*

$$\begin{array}{rcl} M^{k+2} & = & 3M^k-2M^{k+1} \\ & = & 3(u_kI_3+v_kM)-2(u_{k+1}I_3+v_{k+1}M) \\ & = & (3u_k-2u_{k+1})I_3+(3v_k-2v_{k+1})M \end{array}$$

or on a admis qu'il existe un unique (u_{k+2},v_{k+2}) tel que $M^{k+2}=u_{k+2}I_3+v_{k+2}M$ donc :

$$\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N} : \quad u_{k+2}=-2u_{k+1}+3u_k \qquad \text{et} \qquad v_{k+2}=-2v_{k+1}+3v_k}$$

4. On reconnaît des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 d'équation caractéristique : $x^2+2x-3=0$

cette équation a deux solutions réelles : 1 et (-3)

donc il existe α et β tel que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u_k=\alpha+\beta(-3)^k$ et en utilisant $(u_0,v_0)=(1,0)$ il vient :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha-3\beta=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=\frac{3}{4}\\ \beta=\frac{1}{4}\end{cases} \text{ et ainsi :}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad u_k=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(-3)^k}$$

On raisonne de même pour établir :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad v_k=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-3)^k}$$

5. Soit $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} M^k & = & u_kI_3+v_kM \\ & = & \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(-3)^k\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-3)^k\right)\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix} \end{array}$$

donc

$$\boxed{M^k=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5-(-3)^k & 2\left((-3)^k-1\right) & 1-(-3)^k\\ 2\left(1-(-3)^k\right) & 4(-3)^k & 2\left(1-(-3)^k\right)\\ (-3)^k-1 & 2\left(1-(-3)^k\right) & (-3)^k+3\end{pmatrix}}$$