Exemples de suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

I. Intervalle stable.

Définition :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
Dire que "I est stable par f" signifie que $f(I) \subset I$ (*autrement dit :* $\forall x \in I,\ f(x) \in I$)

Remarque :
pour montrer que I est stable par f le plus simple est de construire le tableau de variations de f sur I.

❶ Cela permet de justifier qu'une telle suite est bien définie.

Proposition :

Si $\left\{\begin{array}{c} a \in I \\ I \text{ est stable par } f \end{array}\right.$ **alors** on peut définir une suite (u_n) par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$

Démonstration (*à savoir faire*) :
On suppose : $\left\{\begin{array}{c} a \in I \\ I \text{ est stable par } f \end{array}\right.$
Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (u_n est bien défini et $u_n \in I$).

- Pour $n = 0$, on a u_0 qui est bien défini et vaut a et on a bien $u_0 \in I$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est bien défini et $u_n \in I$
  on sait que $u_n \in I$, donc on peut définir u_{n+1} par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$
  et comme I est stable par f on a : $u_{n+1} \in I$,

En conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.

(Autrement dit : La suite (u_n) est bien définie)

❷ Cela permet de démontrer que toutes les valeurs de (u_n) sont dans I.

Proposition :

Si I est stable par f et si : $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$ **alors** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$

Démonstration (*à savoir faire*) :
On suppose : I est stable par f et : $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$
Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

- Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \in I$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in I$
  on sait que $u_n \in I$, comme I est stable par f on a : $u_{n+1} = f(u_n) \in I$,

En conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$

II. Que dire des limites possibles de (u_n) ?

Remarque.

Soit (u_n) une suite réelle quelconque.

Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a,b]$ et si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell \in [a,b]$

En effet : On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant b$ et (u_n) converge vers ℓ ,
donc en passant à la limite *(inégalités larges)* on obtient : $a \leqslant \ell \leqslant b$

Théorème du point fixe. (*complément*)

Soit f une fonction et (u_n) une suite bien définie, telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers un réel ℓ et si $\underbrace{\lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)}_{f \text{ continue en } \ell}$ alors $f(\ell) = \ell$

Démonstration : (*à savoir refaire*)

On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, (u_n) converge vers un réel ℓ et $\underbrace{\lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)}_{f \text{ continue en } \ell}$

On a d'une part : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$ donc $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$,

d'autre part : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.

et comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient en passant à la limite : $f(\ell) = \ell$

Remarques :

- Les limites possibles de la suite (u_n) sont les points fixes de f.
- Les points fixes sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de Δ.

III. Comment étudier la monotonie de (u_n) ?

On commence par faire une conjecture à partir de la représentation graphique et/ou des premiers termes.

❶ En utilisant le signe de $f(x) - x$.

Pour déterminer ce signe on étudie la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.

Proposition.

① Si $\begin{cases} \forall x \in I, & f(x) - x \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \in I \end{cases}$ alors la suite (u_n) est croissante.

② Si $\begin{cases} \forall x \in I, & f(x) - x \leqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \in I \end{cases}$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : (*à savoir refaire*)

① Supposons $\begin{cases} \forall x \in I, & f(x) - x \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \in I \end{cases}$ et montrons que la suite (u_n) est croissante.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in I$ et pour tout réel x de I, on a $f(x) - x \geqslant 0$,
on peut en déduire que $f(u_n) - u_n \geqslant 0$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

(u_n) est croissante.

② (*Démonstration identique*).

❷ **Par un raisonnement par récurrence**.

Proposition. (*Hors programme, mais à connaître*)

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur D et (u_n) une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in D \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

① si f est croissante sur D alors (u_n) est monotone.

② si f est décroissante sur D alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variations opposés.

Démonstration : (*à savoir refaire*)

① Supposons f est croissante sur D et que $\boldsymbol{u_0} \leqslant \boldsymbol{u_1}$ et montrons que la suite (u_n) est croissante.

Montrons par récurrence sur n que pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

- Pour $n = 0$, on a supposé que $u_0 \leqslant u_1$,
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$,

on sait de plus que $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est croissante sur } D \\ u_n \in D \text{ et } u_{n+1} \in D \end{array} \right.$ on en déduit que : $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$

et ainsi : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$ *(ce qui achève la récurrence)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. ((u_n) est croissante)

Supposons f est croissante sur D et que $\boldsymbol{u_0} \geqslant \boldsymbol{u_1}$ et montrons que la suite (u_n) est décroissante.

Montrons par récurrence sur n que pour tout n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

- Pour $n = 0$, on a supposé que $u_0 \geqslant u_1$,
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant u_{n+1}$,

on sait de plus que $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est croissante sur } D \\ u_n \in D \text{ et } u_{n+1} \in D \end{array} \right.$ on en déduit que : $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$

et ainsi : $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$ *(ce qui achève la récurrence)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$. ((u_n) est décroissante)

En conclusion : On a bien montré que lorsque f est croissante alors la suite est monotone.

(*Elle est croissante ou décroissante*)

Attention : On peut avoir f croissante et (u_n) décroissante. *Vous devez pouvoir donner rapidement des exemples.*

② Supposons f est décroissante sur D et montrons que la suite (u_{2n}) est monotone.

En notant (v_n) la suite (u_{2n}), on remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$.

or f est décroissante sur D donc $f \circ f$ est croissante sur D.

On peut appliquer la proposition ① à la suite (v_n) et ainsi : (v_n) est monotone.

(u_{2n}) est monotone.

Montrons maintenant que (u_{2n+1}) est monotone, et de monotonie opposée de celle de (u_{2n})

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$

et comme f est décroissante :

si (u_{2n}) est croissante alors (u_{2n+1}) est décroissante

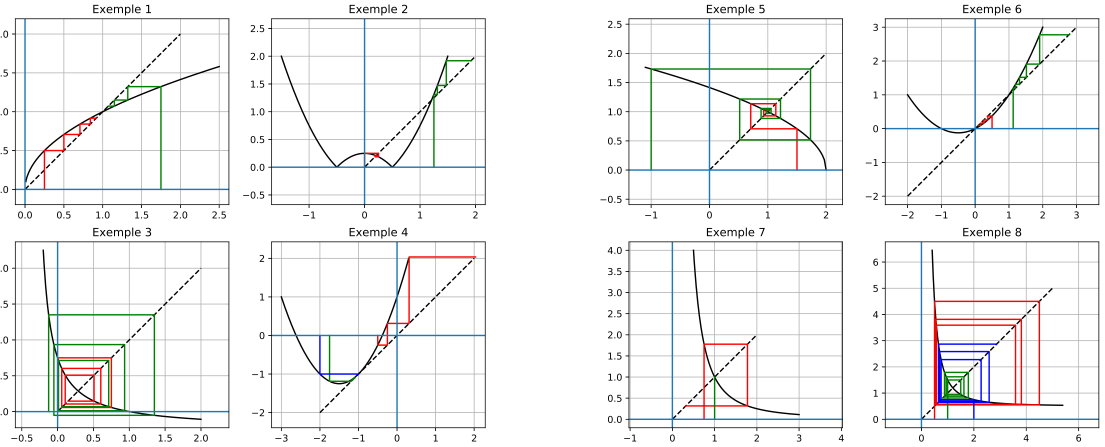
si (u_{2n}) est décroissante alors (u_{2n+1}) est croissante

(u_{2n+1}) est monotone, et de monotonie opposée de celle de (u_{2n})

IV. Des représentations graphiques.

Dans ce contexte on a le choix entre deux représentations usuelles :

❶ On trace les segments $(u_n, u_{n+1}) - (u_{n+1}, u_{n+1})$ et $(u_{n+1}, u_{n+1}) - (u_{n+1}, u_{n+2})$



❷ On trace les points de coordonnées (n, u_n).