Suites.

25 septembre 2025

## Table des matières

1	1.1 Suites arithmétiques	2 2 3 3 3
2		<b>4</b> 4
3	Limite de suite réelle.  3.1 Suites convergentes.  3.2 Suites tendant vers l'infini.  3.3 Suites extraites.  3.4 Limite des suites arithmétiques et des suites géométriques.	5 5 5 6
4	Convergence et inégalités. 4.1 Lorsqu'on sait que les suites convergent	<b>7</b> 7
5	Opérations et limites. $5.1$ Somme $5.2$ Produit $5.3$ Quotient $v_n/u_n$	8 8 8 8
6	Conséquences de la propriété de la borne supérieure. 6.1 Théorème de limite monotone	<b>9</b> 9
7	Echelle de comparaison.	10
8	Suites équivalentes.	11

## Suites usuelles.

## 1.1 Suites arithmétiques.

#### Définition :

Soient  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes et r un nombre complexe,

dire que  $(u_n)$  est arithmétique de raison r signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$ 

**Proposition :** (Formule explicite)

Soient  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  un suite de nombres complexes et r un nombre complexe,

 $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison r, si, et seulement si,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$ 

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique:

Soient  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  une suite, r un nombre complexe et p un entier.

Si  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison r, alors  $\forall n\in[p;+\infty[$ ,  $\sum_{k=p}^nu_k=(n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$ 

 $\sum_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \underbrace{\frac{u_p + u_n}{2}}_{\text{Moyenne arithmétique du 1er et du dernier terme}}$ 

## 1.2 Suites géométriques.

#### Définition:

Soient  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  un suite de nombres complexes et q un nombre complexe,

dire que  $(u_n)$  est géométrique de raison q signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n$ 

**Proposition**: (Formule explicite)

Soient  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  un suite de nombres complexes et q un nombre complexe,

 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison q si, et seulement si,  $\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n=u_0\,q^n$ 

Sommes.

Soient  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  un suite de nombres complexes, q un nombre complexe tel que  $q\neq 1$  et p un entier naturel,

Si  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison q, alors  $\forall n\in[p;+\infty[,\sum_{k=p}^nu_k=u_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}]$ 

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{u_p}_{\text{premier terme}} \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

2

**Remarque :** lorsque q = 1 la suite est constante et alors  $\sum_{k=n}^{n} u_k = (n - p + 1) u_p$ 

## 1.3 Suites arithmético-géométriques.

#### Définition:

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres complexes,

dire que  $(u_n)$  est une suite **arithmético-géométrique** signifie que :

il existe deux complexes a et b avec  $a \neq 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b$ 

#### Méthode pratique :

- ① On cherche le point fixe :  $\ell = a\ell + b \iff ...$   $\ell = ...$
- ② On montre que  $(u_n \ell)$  est géométrique de raison a (une ligne suffit).
- ③ On exprime  $u_n \ell$  en fonction de n.
- **④ On conclut :**  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (u_0 \ell) a^n + \ell$

## 1.4 Récurrence linéaire d'ordre 2.

#### Définition:

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels,

dire que  $(u_n)$  suit une relation de **récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** signifie qu'il existe deux réels a et b (fixés) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a \, u_{n+1} + b \, u_n \qquad (*)$$

Remarque: Un telle suite est entièrement définie par la donnée de ses deux premiers termes.

#### **Définition**:

Si  $(u_n)$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$  alors

l'équation :  $x^2 = ax + b$  est appelée **équation caractéristique** de cette relation de récurrence.

#### Théorème:

Soient a et b deux nombres **réels** avec  $b \neq 0$  et  $(u_n)$  la suite vérifiant :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \ u_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

Cas 1 : Si  $x^2 = ax + b$  possède deux solutions réelles distinctes  $q_1$  et  $q_2$ ,

alors il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha \, q_1^n + \beta \, q_2^n$$

Cas 2 : Si  $x^2 = ax + b$  possède une unique solution réelle  $q_0$ , alors il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha q_0^n + \beta n q_0^n$$

Cas 3 : Si  $x^2 = ax + b$  possède deux racines complexes conjugués  $q = re^{i\theta}$  et  $\bar{q} = re^{-i\theta}$ ,

alors il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha r^n \cos(n\theta) + \beta r^n \sin(n\theta)$$

#### En pratique:

- 1 « On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants »
- 2 On donne l'équation caractéristique.
- 3 On résout l'équation caractéristique et on précise dans quel cas on se trouve.
- 4 On donne l'expression de  $u_n$  en fonction de n avec  $\alpha$  et  $\beta$  à déterminer.
- $\odot$  On détermine le système linéaire en  $\alpha$  et  $\beta$  avec les premières valeurs et on le résout.
- © On conclut en donnant l'expression de  $u_n$  en fonction de n.

### Suites réelles.

## 2.1 Suites majorées, minorées, bornées.

#### Définitions.

Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles,

**0** Dire que  $(u_n)$  est majorée signifie que :  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ 

**2** Dire que  $(u_n)$  est minorée signifie que :  $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant m$ 

**3** Dire que  $(u_n)$  est bornée signifie que :  $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, \ m \leq u_n \leq M$  ou avec la valeur absolue.

**4** Dire  $(u_n)$  est bornée signifie que :  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ 

#### 2.2 Monotonie.

#### Définitions:

Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles,

• dire que  $(u_n)$  est croissante signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1} \quad (\text{ou} \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0)$ 

• dire que  $(u_n)$  est décroissante signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \quad (\text{ou} \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0)$ 

• dire que  $(u_n)$  est strictement croissante signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1} \text{ (ou } u_{n+1} - u_n > 0)$ 

• dire que  $(u_n)$  est strictement décroissante signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n \quad (\text{ou} \quad u_{n+1} - u_n < 0)$ 

En pratique : (Plusieurs stratégies possibles)

## Limite de suite réelle.

## 3.1 Suites convergentes.

#### **Définition**:

Soient  $(u_n)$  une suite réelle et  $\ell$  un réel,

dire que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow}_{APCR} |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Plus simplement :

 $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ 

ou

 $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N \Longrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$ 

Théorème : Toute suite convergente est bornée.

### 3.2 Suites tendant vers l'infini.

#### **Définitions**:

Dire que  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  signifie que :  $\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N, \quad A \leqslant u_n$ Dire que  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$  signifie que :  $\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant A$ 

#### 3.3 Suites extraites.

#### Propositions:

Soient  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles et  $\alpha$  un nombre réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

- ① la suite  $(u_n)$  tend vers  $\alpha$  si, et seulement si, les suites  $(u_{n+1}), (u_{n+2}), \dots$  tendent vers  $\alpha$ .
- ② la suite  $(u_n)$  tend vers  $\alpha$  si, et seulement si, les suites  $(u_{n-1}), (u_{n-2}), \dots$  tendent vers  $\alpha$ .
- ③ Si la suite  $(u_n)$  tend vers  $\alpha$  alors la suite  $(u_{2n})$  tend vers  $\alpha$ .
- 9 Si la suite  $(u_n)$  tend vers  $\alpha$  alors la suite  $(u_{2n+1})$  tend vers  $\alpha$ .

#### Théorème:

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs réelles,

- ① si les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers la même limite  $\ell \in \mathbb{R}$  alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .
- 2 si les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  divergent vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ )

## 3.4 Limite des suites arithmétiques et des suites géométriques.

#### Les suites arithmétiques.

On note, pour  $u_0$  et r deux réels, la suite  $(u_n) = (u_0 + nr)$ ,

- si r = 0 alors  $(u_n)$  converge
- si r > 0 alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- si r < 0 alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

#### Les suites géométriques :

On note, pour  $u_0$  et q deux réels, la suite  $(u_n) = (u_0 q^n)$  (avec  $u_0 \neq 0$ )

- si -1 < q < 1 alors  $(u_n)$  converge vers 0
- si q = 1 alors  $(u_n)$  converge vers  $u_0$  (la suite est constante)
- si q > 1 et  $u_0 > 0$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$
- si q > 1 et  $u_0 < 0$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$

## Convergence et inégalités.

## 4.1 Lorsqu'on sait que les suites convergent.

Il faut toujours avoir justifié que ces limites existent avant d'utiliser ces deux théorèmes.

#### Théorème :

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites que l'on sait être convergentes,  $(u_n)$  vers le réel  $\ell$  et  $(v_n)$  vers le réel  $\ell'$ .

① Si  $0 < \ell$  alors  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N$ ,  $0 < u_n$ .
② Si  $\ell > \ell'$  alors  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N$ ,  $u_n > v_n$ APCR

Théorème : lorsque tout converge, on peut passer à la limite sur des inégalités larges.

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites que l'on sait être convergentes,  $(u_n)$  vers le réel  $\ell$  et  $(v_n)$  vers le réel  $\ell'$ .

**0** Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leqslant u_n$  alors  $0 \leqslant \ell$ .

**9** Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \text{ alors}$ 

 $\ell \leq \ell'$ 

## 4.2 Théorèmes de comparaison.

Ici les théorèmes permettent de démontrer que des limites existent.

Théorème :  $(+\infty \text{ et } -\infty)$ 

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs réelles,

① Si  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$  alors  $(v_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

② Si  $(v_n)$  diverge vers  $-\infty$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leqslant v_n$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

**Théorème :** (d'encadrement ou encore "des gendarmes")

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites à valeurs réelles,

Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$  et si  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers un réel  $\ell$ 

alors  $(v_n)$  est convergente et sa limite est  $\ell$ .

#### Corollaires

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs réelles et  $\ell$  un réel.

① Si  $\forall n \in \mathbb{N} \mid |u_n| \leq v_n$  et si  $(v_n)$  converge vers 0 alors  $(u_n)$  converge vers 0.

② Si  $(u_n)$  converge vers 0 et si  $(v_n)$  est bornée alors  $(u_nv_n)$  converge vers 0.

③ Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \ell| \leq v_n$  et si  $(v_n)$  converge vers 0 alors  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

**Remarque** : dans tous les théorèmes de cette page on peut remplacer " $\forall n \in \mathbb{N}$ " par " $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N$ "

5

## Opérations et limites.

## 5.1 Somme.

$\lim_{n \to +\infty} (v_n)$ $\lim_{n \to +\infty} (u_n)$	l	+∞	$-\infty$
$\ell'$			
+∞			
$-\infty$			

## 5.2 Produit.

$\lim_{n \to +\infty} (v_n)$ $\lim_{n \to +\infty} (u_n)$	$\ell < 0$	+∞	$-\infty$	0
$\ell' > 0$				
+∞				
$-\infty$				
0				

## 5.3 Quotient $v_n/u_n$ .

$\lim_{n \to +\infty} (v_n)$ $\lim_{n \to +\infty} (u_n)$	$\ell < 0$	+∞	$-\infty$	0
$\ell' > 0$				
+∞				
$-\infty$				
0+				
0-				

# Conséquences de la propriété de la borne supérieure.

Revoir la définition des bornes supérieure/inférieure et le théorème de la borne supérieure.

#### 6.1 Théorème de limite monotone.

Version courte.

**Théorème :** (théorème de limite monotone)

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs réelles,

Si  $(u_n)$  est monotone alors  $(u_n)$  admet une limite.

Théorème : (théorème de limite monotone)

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs réelles,

- $\bullet$  Si  $(u_n)$  est croissante et majorée alors la suite  $(u_n)$  converge.
- **2** Si  $(u_n)$  est croissante et si elle diverge alors la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- $\bullet$  Si  $(u_n)$  est décroissante et minorée alors la suite  $(u_n)$  converge.
- **4** Si  $(u_n)$  est décroissante et si elle diverge alors la suite  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

Remarque : Dans ce théorème on peut remplacer "croissante" (resp. "décroissante") par "croissante APCR" (resp. "décroissante APCR")

## 6.2 Suites adjacentes.

#### Définition:

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs réelles.

Dire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes signifie que l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence converge vers 0.

#### Théorème:

Si deux suites sont adjacentes alors elles sont convergentes et elles convergent vers la même limite.

## Echelle de comparaison.

Théorème. (Limites à connaître)

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $a \in ]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ ,

$$\mathbf{0} \lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\begin{aligned} & ]-\infty; \ -1 \ [\cup] 1; +\infty[ \ , \\ & \bullet \lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \end{aligned} \qquad \bullet \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

Remarques:

• on en déduit :  $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\alpha}}{n!} = 0$ 

• Ces limites sont appelées "croissances comparées des suites usuelles".

• La limite  $\bullet$  est toujours vraie pour  $a \in [-1, 1]$ , mais il ne s'agit plus d'une limite "croissance comparée".

• La limite  $m{Q}$  entraı̂ne :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x \in ]-1,1[, \lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} x^n = 0$   $Quand \ \alpha < 0 \ \textit{ce n'est pas une croissance comparée}.$ 

Corollaire.

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $x \in ]-1;1[$ ,

$$\lim_{n\to +\infty} n^\alpha x^n = 0$$

Remarque:

Lorsque  $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$ , on note  $u_n=o(v_n)$  et on dit que  $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$ .



## Suites équivalentes.

#### Définition.

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que  $(v_n)$  ne s'annule pas : Dire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites équivalentes signifie que : la suite  $\frac{(u_n)}{(v_n)}$  converge vers 1

On note:

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$$
 ou  $u_n \sim v_n$ 

Attention : on n'écrit jamais :  $u_n \sim 0$ 

**Proposition**: (Les propriétés qui passent de  $(v_n)$  à  $(u_n)$  lorsque  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont équivalentes).

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites équivalentes.  $(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n)$ 

- si  $\lim_{n \to +\infty} u_n = \beta$  alors  $\lim_{n \to +\infty} v_n = \beta$
- si  $u_n \neq 0$  à partir d'un certain rang alors  $v_n \neq 0$  à partir d'un certain rang.
- si  $u_n \ge 0$  à partir d'un certain rang alors  $v_n \ge 0$  à partir d'un certain rang.
- si  $u_n < 0$  à partir d'un certain rang alors  $v_n < 0$  à partir d'un certain rang.

**Proposition**: (Relation d'équivalence)

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs réelles.

- ①  $(u_n) \sim (u_n)$  ② Si  $(u_n) \sim (v_n)$  alors  $(v_n) \sim (u_n)$
- 3 Si  $(u_n) \sim (v_n)$  et  $(v_n) \sim (w_n)$  alors  $(u_n) \sim (w_n)$

**Théorème :** (Opérations et suites équivalentes)

① Si  $(u_n) \sim (v_n)$  et  $(u'_n) \sim (v'_n)$  alors  $(u_n u'_n) \sim (v_n v'_n)$ 

Produit.

② Si  $\left\{ \begin{array}{l} (u_n) \sim (v_n) \\ (u'_n) \sim (v'_n) \end{array} \right.$  alors  $\left( \frac{u_n}{u'_n} \right) \sim \left( \frac{v_n}{v'_n} \right)$ 

3 Si  $(u_n) \sim (v_n)$  alors  $(u_n^{\alpha}) \sim (v_n^{\alpha})$ 

Elévation à une puissance constante.  $(\alpha \in \mathbb{R})$ 

4 Si  $(u_n) \sim (v_n)$  alors  $(|u_n|) \sim (|v_n|)$ 

Passage à la valeur absolue.

Attention : on ne somme pas des équivalents.