Suites.

18 septembre 2024

Table des matières

1 Suites usuelles. 2
- 1.1 Suites arithmétiques. 2
- 1.2 Suites géométriques. 2
- 1.3 Suites arithmético-géométriques. 3
- 1.4 Récurrence linéaire d'ordre 2. 3

2 Suites réelles. 4
- 2.1 Définitions. 4
- 2.2 Suites majorées, minorées, bornées. 4
- 2.3 Monotonie. 4

3 Limite de suite réelle. 5
- 3.1 Suites convergentes. 5
- 3.2 Suites tendant vers l'infini. 5
- 3.3 Suites extraites. 5
- 3.4 Limite des suites arithmétiques et des suites géométriques. 6

4 Convergence et inégalités. 7
- 4.1 Lorsqu'on sait que les suites convergent. 7
- 4.2 Théorèmes de comparaison. 7

5 Opérations et limites. 8
- 5.1 Somme. 8
- 5.2 Produit. 8
- 5.3 Quotient v_n/u_n. 8

6 Conséquences de la propriété de la borne supérieure. 9
- 6.1 Théorème de convergence monotone. 9
- 6.2 Suites adjacentes. 9

7 Echelle de comparaison. 10

8 Suites équivalentes. 11

1 Suites usuelles.

1.1 Suites arithmétiques.

Définition :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et r un nombre complexe,
dire que (u_n) est arithmétique de raison r signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$

Proposition : *(Formule explicite)*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de nombres complexes et r un nombre complexe,
(u_n) est une suite arithmétique de raison r, **si, et seulement si,** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, r un nombre complexe et p un entier.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors $\forall n \in [\![p;+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\,\frac{u_p+u_n}{2}$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \underbrace{\frac{u_p + u_n}{2}}_{\text{Moyenne arithmétique du 1er et du dernier terme}}$$

1.2 Suites géométriques.

Définition :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de nombres complexes et q un nombre complexe,
dire que (u_n) est géométrique de raison q signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q\,u_n$

Proposition : (*Formule explicite*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de nombres complexes et q un nombre complexe,
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q **si, et seulement si,** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0\,q^n$

Sommes.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de nombres complexes, q un nombre complexe tel que $\boldsymbol{q \neq 1}$ et p un entier naturel,
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q , alors $\forall n \in [\![p;+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p\,\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{u_p}_{\text{premier terme}}\ \frac{1-q^{\overbrace{n-p+1}^{\text{nombre de termes}}}}{1-q}$$

Remarque : lorsque $\boldsymbol{q = 1}$ la suite est constante et alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\,u_p$

1.3 Suites arithmético-géométriques.

Définition :

Soit (u_n) une suite de nombres complexes,
dire que (u_n) est une suite **arithmético-géométrique** signifie que :
il existe deux complexes a et b avec $a \neq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = a\,u_n + b$

Méthode pratique :

① **On cherche le point fixe** : $\ell = a\ell + b \iff \quad ... \qquad \boxed{\ell = ...}$

② **On montre que $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a** .

③ **On exprime $u_n - \ell$ en fonction de** n.

④ **On conclut :** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = (u_0 - \ell)\,a^n + \ell}$

1.4 Récurrence linéaire d'ordre 2.

Définition :

Soit (u_n) une suite de nombres réels,
dire que (u_n) suit une relation de **récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** signifie qu'il existe deux réels a et b (fixés) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n \qquad (*)$$

Remarque : Un telle suite est entièrement définie par la donnée de ses deux premiers termes.

Définition :

Si (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ alors
l'équation : $x^2 = ax + b$ est appelée **équation caractéristique** de cette relation de récurrence.

Théorème :

Soient a et b deux nombres **réels** avec $b \neq 0$ et (u_n) la suite vérifiant :

$$u_0 \in \mathbb{R},\ u_1 \in \mathbb{R},\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$$

Cas 1 : Si $x^2 = ax + b$ **possède deux solutions réelles distinctes** q_1 **et** q_2**,**
alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \alpha\,q_1^n + \beta\,q_2^n$$

Cas 2 : Si $x^2 = ax + b$ **possède une unique solution réelle** q_0**,** alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\qquad u_n = \alpha\,q_0^n + \beta\,n\,q_0^n$$

Cas 3 : Si $x^2 = ax + b$ **possède deux racines complexes conjugués** $q = re^{i\theta}$ **et** $\bar{q} = re^{-i\theta}$**,**
alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \alpha\,r^n \cos(n\theta) + \beta\,r^n \sin(n\theta)$$

En pratique :

① « On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants »
② On donne l'équation caractéristique.
③ On résout l'équation caractéristique et on précise dans quel cas on se trouve.
④ On donne l'expression de u_n en fonction de n avec α et β à déterminer.
⑤ On détermine le système linéaire en α et β avec les premières valeurs et on le résout.
⑥ On conclut en donnant l'expression de u_n en fonction de n.

2

Suites réelles.

2.1 Définitions.

Définition :

Soit E un ensemble quelconque,
Dire que (u_n) est une **suite à valeurs dans** E, signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in E$.

Egalité entre deux suites :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, $\qquad (u_n) = (v_n) \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n$

2.2 Suites majorées, minorées, bornées.

Définitions.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles,

❶ Dire que (u_n) est majorée signifie que : $\quad \exists M \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant M$

❷ Dire que (u_n) est minorée signifie que : $\quad \exists m \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant m$

❸ Dire que (u_n) est bornée signifie que : $\quad \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ m \leqslant u_n \leqslant M$

ou avec la valeur absolue.

❹ Dire (u_n) est bornée signifie que : $\quad \exists M \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leqslant M$

2.3 Monotonie.

Définitions :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles,

- dire que (u_n) est croissante signifie que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1} \quad$ (ou $\quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$)
- dire que (u_n) est décroissante signifie que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \quad$ (ou $\quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$)
- dire que (u_n) est strictement croissante signifie que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1} \quad$ (ou $\quad u_{n+1} - u_n > 0$)
- dire que (u_n) est strictement décroissante signifie que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n \quad$ (ou $\quad u_{n+1} - u_n < 0$)

En pratique : (*Plusieurs stratégies possibles*)

3

Limite de suite réelle.

3.1 Suites convergentes.

Définition :

Soient (u_n) une suite réelle et ℓ un réel,
dire que $\boldsymbol{(u_n)}$ **converge vers** $\boldsymbol{\ell}$ signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow}_{APCR} |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Définition : Dire que (u_n) diverge signifie que (u_n) ne converge pas.

Théorème : Toute suite convergente est bornée.

3.2 Suites tendant vers l'infini.

Définitions :

Dire que (u_n) diverge vers $+\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N,}_{APCR} \quad A \leqslant u_n$

Dire que (u_n) diverge vers $-\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N,}_{APCR} \quad u_n \leqslant A$

Proposition :

Si (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), **alors** (u_n) n'est pas majorée (resp. minorée).

3.3 Suites extraites.

Propositions :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et α un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

① **Si** la suite (u_n) tend vers α **alors** les suites (u_{n+1}), (u_{n+2}), ... tendent vers α.
② **Si** la suite (u_n) tend vers α **alors** les suites (u_{n-1}), (u_{n-2}) , ... tendent vers α.
③ **Si** la suite (u_n) tend vers α **alors** la suite (u_{2n}) tend vers α.
④ **Si** la suite (u_n) tend vers α **alors** la suite (u_{2n+1}) tend vers α.

Théorème :

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles,

① si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

② si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) divergent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

3.4 Limite des suites arithmétiques et des suites géométriques.

Les suites arithmétiques.

On note, pour u_0 et r deux réels, la suite $(u_n) = (u_0 + nr)$,

- si $r = 0$ alors (u_n) converge
- si $r > 0$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
- si $r < 0$ alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Les suites géométriques :

On note, pour u_0 et q deux réels, la suite $(u_n) = (u_0\, q^n)$ (avec $u_0 \neq 0$)

- si $-1 < q < 1$ alors (u_n) converge vers 0
- si $q = 1$ alors (u_n) converge vers u_0 *(la suite est constante)*
- si $q > 1$ et $u_0 > 0$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$
- si $q > 1$ et $u_0 < 0$ alors (u_n) diverge vers $-\infty$

4

Convergence et inégalités.

4.1 Lorsqu'on sait que les suites convergent.

Il faut toujours avoir justifié que ces limites existent avant d'utiliser ces deux théorèmes.

Théorème :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites que l'on sait être convergentes, (u_n) vers le réel ℓ et (v_n) vers le réel ℓ'.

① **Si** $0 < \ell$ **alors** $\underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N}_{APCR}, \quad 0 < u_n$. ② **Si** $\ell > \ell'$ **alors** $\underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N}_{APCR}, \quad u_n > v_n$
.

Théorème : *lorsque tout converge, on peut passer à la limite sur des* ***inégalités larges****.*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites que l'on sait être convergentes, (u_n) vers le réel ℓ et (v_n) vers le réel ℓ'.

❶ **Si** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n$ **alors** $0 \leqslant \ell$. ❷ **Si** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$ **alors** $\ell \leqslant \ell'$.

4.2 Théorèmes de comparaison.

Ici les théorèmes permettent de démontrer que des limites existent.

Théorème : $(+\infty$ et $-\infty)$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles,

① **Si** (u_n) diverge vers $+\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$ **alors** (v_n) diverge vers $+\infty$.

② **Si** (v_n) diverge vers $-\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$ **alors** (u_n) diverge vers $-\infty$.

Théorème : (*d'encadrement ou encore "des gendarmes"*)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites à valeurs réelles,

Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers un réel ℓ
alors (v_n) est convergente et sa limite est ℓ.

Corollaires

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles et ℓ un réel.

① **Si** $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant v_n$ et si (v_n) converge vers 0 **alors** (u_n) converge vers 0.

② **Si** (u_n) converge vers 0 et si (v_n) est bornée **alors** $(u_n v_n)$ converge vers 0.

③ **Si** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant v_n$ et si (v_n) converge vers 0 **alors** (u_n) converge vers ℓ.

Remarque : dans tous les théorèmes de cette page on peut remplacer "$\forall n \in \mathbb{N}$" par "$\underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N}_{APCR}$"

5

Opérations et limites.

5.1 Somme.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'			
$+\infty$			
$-\infty$			

5.2 Produit.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'>0$				
$+\infty$				
$-\infty$				
0				

5.3 Quotient v_n/u_n.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'>0$				
$+\infty$				
$-\infty$				
0^+				
0^-				

6 Conséquences de la propriété de la borne supérieure.

Pour ceux qui veulent aller plus loin : Revoir la définition des bornes supérieure/inférieure et le théorème de la borne supérieure.

6.1 Théorème de convergence monotone.

Théorème : (*théorème de convergence monotone*)

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles,
❶ Si (u_n) est croissante et majorée alors la suite (u_n) converge.
❷ Si (u_n) est croissante et si elle diverge alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

❸ Si (u_n) est décroissante et minorée alors la suite (u_n) converge.
❹ Si (u_n) est décroissante et si elle diverge alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Remarque : Dans ce théorème on peut remplacer "croissante" (resp. "décroissante") par "croissante APCR" (resp. "décroissante APCR")

6.2 Suites adjacentes.

Définition :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles.
Dire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes signifie que l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence converge vers 0.

Théorème :

Si deux suites sont adjacentes **alors** elles sont convergentes **et** elles convergent vers la même limite.

7 Echelle de comparaison.

Théorème. (*Limites à connaître*)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$,

$$❶ \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad ❷ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

Remarques :

- on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$
- Ces limites sont appelées **"croissances comparées des suites usuelles"**.
- La limite ❶ est toujours vraie pour $a \in [-1, 1]$, mais il ne s'agit plus d'une limite "croissance comparée".
- La limite ❷ entraîne : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1, 1[, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0$

  Quand $\alpha < 0$ ce n'est pas une croissance comparée.

Corollaire.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in]-1; 1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0$$

Remarque :

Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, on note $u_n = o(v_n)$ et on dit que (u_n) est négligeable devant (v_n).

8

Suites équivalentes.

Définition.

> Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (v_n) ne s'annule pas :
> Dire que (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes signifie que : la suite $\dfrac{(u_n)}{(v_n)}$ converge vers 1

On note :

$$\boldsymbol{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n} \qquad \textbf{ou} \qquad \boldsymbol{u_n \sim v_n}$$

Attention : on n'écrit jamais : $\boldsymbol{u_n \sim 0}$

Proposition : (*Les propriétés qui passent de* (v_n) *à* (u_n) *lorsque* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes*).

> Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. ($u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$)
> - si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \beta$
> - si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
> - si $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang alors $v_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.
> - si $u_n < 0$ à partir d'un certain rang alors $v_n < 0$ à partir d'un certain rang.

Proposition : (*Relation d'équivalence*)

> Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles.
> ① $(u_n) \sim (u_n)$ ② Si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(v_n) \sim (u_n)$
> ③ Si $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$ alors $(u_n) \sim (w_n)$

Théorème : (*Opérations et suites équivalentes*)

> ① Si $(u_n) \sim (v_n)$ et $(u'_n) \sim (v'_n)$ alors $(u_n u'_n) \sim (v_n v'_n)$ *Produit.*
>
> ② Si $\begin{cases} (u_n) \sim (v_n) \\ (u'_n) \sim (v'_n) \end{cases}$ alors $\left(\dfrac{u_n}{u'_n}\right) \sim \left(\dfrac{v_n}{v'_n}\right)$ *Quotient.*
>
> ③ Si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(u_n^\alpha) \sim (v_n^\alpha)$ *Elévation à une puissance constante.* ($\alpha \in \mathbb{R}$)
>
> ④ Si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(|u_n|) \sim (|v_n|)$ *Passage à la valeur absolue.*

Attention : on ne somme pas des équivalents.