1

Généralités

1.1 Majoration, minoration.

Définition :

Soient f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E une partie de D_f $(E \subset D_f)$,
Dire que f est majorée sur E signifie que : $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E, \quad f(x) \leqslant M.$

On définit de même : f est minorée ou bornée sur E.

1.2 Maximum d'une fonction à valeurs réelles.

Définition : *(maximum global)*

Soient f une fonction définie sur D et M un réel
Dire que M est le maximum de f sur D signifie que :
M est un majorant de f et il existe $x_0 \in D$ tel que $M = f(x_0)$

On note : $\max\limits_{x \in D} (f(x))$.

On définit de même le minimum d'une fonction sur un ensemble D.

Définition : *(maximum local)*

Soient f une fonction et M un réel
Dire que M est un maximum local de f signifie que :
Il existe $x_0 \in D_f$ et $\varepsilon > 0$ tels que $M = f(x_0)$ et M est le maximum de f sur $D_f \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

On définit de même un minimum local d'une fonction.

1.3 Sens de variations.

Définition :

Soit f une fonction définie sur D,
Dire que f est **croissante** sur D signifie que : $\forall (a,b) \in D^2,\ a < b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$
Dire que f est **strictement croissante** sur D signifie que : $\forall (a,b) \in D^2,\ a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$

On définit de même décroissante et strictement décroissante.

Théorème : (*Propriétés des fonctions strictement monotones*)

Si f est strictement croissante sur D alors	①	$\forall (a,b) \in D^2, \quad a = b \iff f(a) = f(b)$
	②	$\forall (a,b) \in D^2, \quad a < b \iff f(a) < f(b)$
	③	$\forall (a,b) \in D^2, \quad a \leqslant b \iff f(a) \leqslant f(b)$
Si f est strictement décroissante sur D alors	①	$\forall (a,b) \in D^2, \quad a = b \iff f(a) = f(b)$
	②	$\forall (a,b) \in D^2, \quad a < b \iff f(a) > f(b)$
	③	$\forall (a,b) \in D^2, \quad a \leqslant b \iff f(a) \geqslant f(b)$

2

Limite d'une fonction.

2.1 Limite réelle en x_0 ou en ∞.

2.1.1 En $-\infty$ ou $+\infty$

Définition :

Soient ℓ un réel et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
Dire que $\boldsymbol{f}$ **tend vers** $\boldsymbol{\ell}$ **en** $\boldsymbol{+\infty}$ signifie que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel ℓ (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{+\infty} f = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Définition :

Soient ℓ un réel et f une fonction définie au voisinage de $-\infty$.
Dire que $\boldsymbol{f}$ **tend vers** $\boldsymbol{\ell}$ **en** $\boldsymbol{-\infty}$ signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \leqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel ℓ (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{-\infty} f = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$$

2.1.2 En x_0

Soient ℓ et x_0 deux nombres réels, et f une fonction définie au voisinage de x_0.
Dire que $\boldsymbol{f}$ **tend vers** $\boldsymbol{\ell}$ **en** $\boldsymbol{x_0}$ signifie que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel ℓ (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x_0} f = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$$

Définition :

Dire que f est **continue** en x_0 signifie que : f est définie en x_0 et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Autrement dit : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0| \leqslant \varepsilon$

2.2 Limite infinie

Définitions :

Soit f une définie au voisinage de $\boldsymbol{x_0}$,

Ecrire : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A$

Ecrire : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant A$

Soit f une définie au voisinage de $\boldsymbol{+\infty}$,

Ecrire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A$

Ecrire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A$

Soit f une définie au voisinage de $\boldsymbol{-\infty}$,

Ecrire : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A$

Ecrire : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A$

2.3 Limites et inégalités.

2.3.1 Lorsqu'on sait que les fonctions ont des limites réelles.

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de α,

❶ Si $\lim\limits_{\alpha} f = \ell$ et si $\ell > 0$ alors au voisinage de α, $f(x) > 0$.

❷ Si f et g admettent une limite réelle en α et si $\lim\limits_{\alpha} f < \lim\limits_{\alpha} g$ alors au voisinage de α, $f(x) < g(x)$.

Théorème :

❶ Si au voisinage de α, $f(x) \geqslant 0$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$ alors $\ell \geqslant 0$.

❷ Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de α, $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell'$ alors $\ell \leqslant \ell'$

2.3.2 Théorèmes de comparaison.

Théorèmes :

① Si au voisinage de α , $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$ existe et vaut $+\infty$.

② Si au voisinage de α , $g(x) \leqslant f(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$ existe et vaut $-\infty$.

③ Si au voisinage de α , $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe et vaut ℓ.

Corollaires :

① Si au voisinage de α , $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe et vaut ℓ.

② Si au voisinage de α, $f(x) = g(x) \times h(x)$ $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$ et au voisinage de α, h est bornée. alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe et vaut 0.

2.4 Opérations et limites

ℓ et ℓ' désignent deux réels, α désigne soit un réel x_0 , soit $+\infty$, soit $-\infty$.

2.4.1 Limite de la somme de deux fonctions : $f+g$

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ / $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'			
$+\infty$			
$-\infty$			

2.4.2 Limite du produit de deux fonctions : $(f\times g)$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ / $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'>0$				
$+\infty$				
$-\infty$				
0				

2.4.3 Limite du quotient de deux fonctions : $\left(\dfrac{f}{g}\right)$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ / $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'>0$				
$+\infty$				
$-\infty$				
0^+				
0^-				

2.4.4 Limites et composées.

Théorème : (*Composée de deux fonctions.*)

Soit f et g deux fonctions telles que f est définie au voisinage de α, g de β et $g\circ f$ de α,

$$\text{Si}\quad \left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta\\ \text{et}\\ \lim\limits_{y\to\beta} g(y)=\gamma\end{array}\right.\qquad \text{alors}\quad \lim_{x\to\alpha} g\big(f(x)\big)=\gamma$$

Théorème : (*Composée d'une suite et d'une fonction.*)

Soit f une fonction définie au voisinage de α et (u_n) une suite à valeurs dans D_f.

Si $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta \end{array} \right.$ alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers β quand n tend vers $+\infty$.

2.5 Echelle de comparaison. (*Croissances comparées*)

Proposition.

Pour $a \in]0;+\infty[$, (a **un réel strictement positif**)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$$

Remarques :

❶ On peut ajouter $\lim\limits_{x\to 0} (x^a \ln(x)) = 0$

❷ On se réfère toujours à une de ces limites pour justifier une "croissance comparée".

2.6 Théorème de limite monotone.

Théorème :

Soit f une fonction, α et β désignent des réels, $+\infty$ ou $-\infty$

Si f est monotone sur l'intervalle $\big]\,\alpha;\beta\,\big[$

alors f admet une limite (réelle ou infinie) à droite en α et à gauche en β.

Démonstration. *(Conséquence du théorème de la borne supérieure)*

Corollaire :

Si f est croissante sur un intervalle sur un intervalle ouvert I

alors f possède une limite réelle en tout point de I à gauche et à droite.

En situation :

- si f est croissante sur $]a,+\infty[$ et si f est minorée alors f admet une limite réelle en a.
- si f est croissante sur $]a,+\infty[$ alors f admet une limite à droite en a, une limite réelle ou $+\infty$.
- si f est décroissante sur $]a,b[$ et si f est majorée alors f admet une limite réelle à droite en a.
- si f est décroissante sur $]a,b[$ alors f admet à gauche en b une limite réelle ou $-\infty$.
- si f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et si f est minorée alors f admet une limite réelle en $+\infty$.
- si f est décroissante sur $\mathbb{R}$ alors f admet une limite en $-\infty$, une limite réelle ou $+\infty$

Remarques :

- Si f est croissante sur $[a,b]$ alors f n'a pas nécessairement une limite en b,
  en revanche elle a une limite à gauche en b.
  Prendre par exemple la fonction partie entière sur $[0,1]$.
- On utilise souvent ce théorème en construisant un tableau de variations.

Corollaire :

Soit f une fonction, α et β désignent des réels, $+\infty$ ou $-\infty$

Si f est croissante sur l'intervalle $\big]\,\alpha\,;\,\beta\,\big[$ alors on a les équivalences suivante :

❶ f admet une limite réelle à gauche en β si, et seulement si, f est majorée.

❷ f admet une limite réelle à droite en α si, et seulement si, f est minorée.

3

Continuité sur un intervalle.

Les fonctions f, g, .. sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et sont chacunes définies sur une partie de $\mathbb{R}$: D_f, D_g, ...

3.1 Généralités.

Définition :

Soit $D \subset D_f$ tel que f est définie au voisinage de tout x_0 de D.
Dire que f est continue sur D signifie que : f est continue en tout x_0 de D.

3.2 Opérations et continuité.

Théorème :

Si f et g sont continues sur D **alors** $f+g$, $f \times g$ sont continues sur D.
si de plus g ne s'annule pas sur D **alors** $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.

Théorème :

Soient I, J deux intervalles, $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions,

$$\textbf{Si} \begin{cases} ① \ f \text{ est continue sur } I \\ ② \ g \text{ est continue sur } J \\ ③ \ \forall x \in I, \quad f(x) \in J \end{cases} \quad \textbf{alors} \quad g \circ f \text{ est continue sur } I.$$

3.3 Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème :

Version 1 : Si f est continue sur un intervalle I et a et b sont deux éléments de I,
alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet *au moins* une solution dans $[a, b]$.

Version 2 : Soit I une partie de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I et f une fonction défiie sur I.

$$\textbf{Si} \begin{cases} ① \ f \text{ est continue sur } I \\ ② \ I \text{ est un intervalle} \\ ③ \ f(a) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f(b \geqslant 0 \end{cases} \quad \textbf{alors} \ \text{il existe } (\textit{au moins}) \text{ un réel } c \in I \quad \text{tel que } f(c) = 0.$$

Version 3 : Si I est un intervalle et f est une fonction continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

L'image continue d'un intervalle est un intervalle.

3.4 Théorème de la bijection.

Théorème :

Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I,

Si $\begin{cases} ① \ I \text{ est un intervalle} \\ ② \ f \text{ est continue sur } I \\ ③ \ f \text{ est strictement monotone sur } I \end{cases}$ alors $\begin{cases} ❶ \ f(I) \text{ est un intervalle} \\ ❷ \ f \text{ réalise une bijection de } I \text{ dans } f(I) \end{cases}$

Ce théorème est rarement utilisé tel quel, mais il en découle toutes les versions utilisées :

Théorème de la bijection (*avec toutes les situations possibles*) :

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors f réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$

Si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors f réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[f(b), f(a)]$

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$,
alors f réalise une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]\lim\limits_{\alpha} f, \lim\limits_{\beta} f[$

Si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$,
alors f réalise une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]\lim\limits_{\beta} f, \lim\limits_{\alpha} f[$

...

Propositions (*Versions utilisées en pratique*) :

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors $\forall k \in [f(a), f(b)], \exists! \alpha \in [a, b] : \ f(\alpha) = k$

Si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors $\forall k \in [f(b), f(a)], \exists! \alpha \in [a, b] : \ f(\alpha) = k$

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$,
alors $\forall k \in]\lim\limits_{\alpha} f, \lim\limits_{\beta} f[, \exists! \alpha \in [a, b] : \ f(\alpha) = k$

...

Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I,

on note : $g : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et g^{-1} sa bijection réciproque.

- g^{-1} est une bijection de $f(I)$ dans I.
- g^{-1} est continue. (*La réciproque d'une bijection continue est continue*)
- g^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que g.

Remarque : Il est simple de construire le tableau de variation de g^{-1}, connaissant celui de g.

3.5 Image continue d'un segment.

Théorème :

L'image directe d'un segment par une fonction continue est segment.

Remarques :

- Si f est continue sur le segment $[a, b]$ alors il existe $(x_1, x_2) \in [a, b]^2$: tel que $f\big([a, b]\big) = \big[f(x_1), f(x_2)\big]$.
- Si f est continue sur le segment $[a, b]$ alors elle est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes *(sup et inf)*.

4

Dérivation.

4.1 Définition

Définition :

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in D$, (f *est définie en* x_0)

Dire que f est dérivable en x_0 signifie que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite réelle quand x tend vers x_0.

Cette limite s'appelle alors **le nombre dérivé** de f en x_0.

4.2 Continuité et dérivabilité.

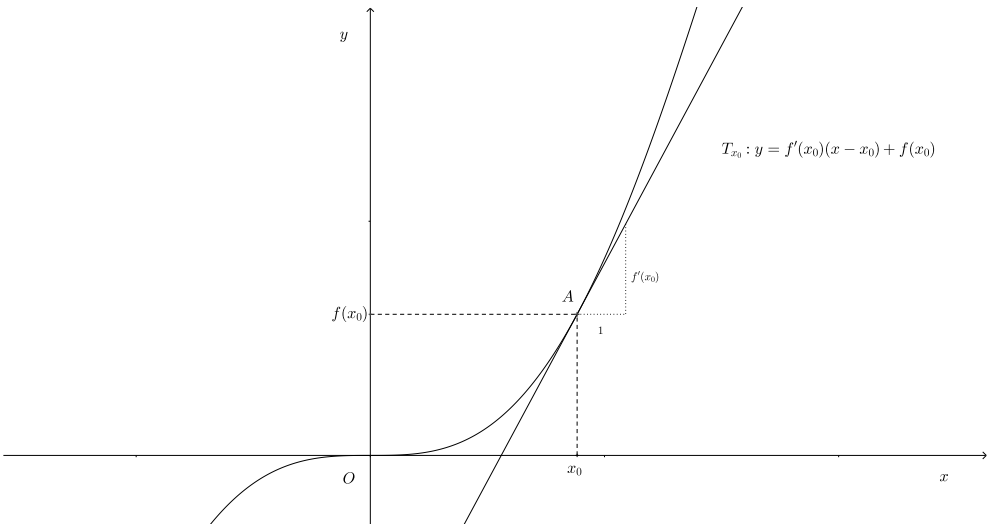
Si f est dérivable en x_0 **alors** f est continue en x_0.

4.3 Tangente à une courbe.

Définition.

Lorsque f dérivable en x_0.
La droite passant par $A(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$ est appelée **tangente** à la courbe d'équation $y = f(x)$.

C'est la position limite de la corde passant par les points de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$



Proposition.

L'équation de la tangente à C_f en $A(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

4.4 Dérivée des fonctions usuelles.

Fonction	dérivée
$x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \longmapsto a^x$	$x \longmapsto \ln(a)a^x$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$
$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$	$x \longmapsto \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$

Fonction	dérivée
$x \longmapsto \ln(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto \cos(x)$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto -\sin(x)$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto 1+\tan^2(x)$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$x \longmapsto \arctan(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

4.5 Opérations et dérivation.

Théorème :

Soient α, β deux réels et f, g deux fonctions définies sur un intervalle I,

Si f et g sont dérivables sur I alors :

❶ $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$.

❷ $f\,g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I alors :

❸ $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{1}{g}$ sont dérivables sur I et $\forall x \in I$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

4.6 Composée et fonctions dérivables.

Théorème :

Soient I et J deux intervalles, $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I, \\ g \text{ est dérivable sur } J, \\ \text{et } \forall x \in I, \quad f(x) \in J \end{cases} \quad \textbf{alors} \quad \begin{cases} g \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ \qquad \text{et} \\ \forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) \end{cases}$$

4.7 Dérivée de la réciproque.

Théorème :

Soient f une bijection continue et strictement monotone de I dans $f(I)$, $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$.

1er cas : Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

2ème cas : Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$ alors

f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et $C_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point d'abscisse y_0.

Corollaire :

Soit f une bijection continue et strictement monotone de I sur $f(I)$,
Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et :

$$\forall x \in f(I), \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

4.8 Dérivée d'ordre supérieur.

4.8.1 Définition de la dérivée n ième .

Définition : (fonctions n fois dérivables)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. (on note $f = f^{(0)}$)
Dire que : f est (*au moins*) n fois dérivable sur I,
signifie que : successivement pour tout k compris entre 1 et n,

$$f^{(k-1)} \text{ est dérivable sur } I \text{ et on note } f^{(k)} \text{ sa dérivée.}$$

4.8.2 Fonctions de classe C^n .

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I,
Dire qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I signifie qu'elle est n fois dérivable et que $\boldsymbol{f^{(n)}}$**est continue** sur I.
Dire que f est indéfiniment dérivable sur I signifie que pour tout entier naturel n, la fonction f est n fois dérivable sur I (on dit alors que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I).

4.8.3 Dérivées successives et opérations.

Théorèmes :

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et α, β deux réels.

① Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(I)$ alors $\alpha f + \beta g$ et $f\,g$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

② Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(I)$ et si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

③ Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$, $g \in \mathcal{C}^n(J)$ et si $f(I) = J$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$

On peut énoncer les mêmes théorèmes en remplaçant tous les $\mathcal{C}^n$ par des $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème :

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et α, β deux réels.
Si f et g sont n fois dérivables sur I alors $\alpha f + \beta g$ est n fois dérivable sur I et $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$

4.9 Extremum local d'une fonction dérivable.

Théorème : (condition d'existence d'un extremum local sur un ouvert)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I qui n'est pas une borne de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f \text{ admet un extremum local en } a \end{cases} \quad \text{alors} \quad f'(a) = 0$$

4.10 Théorème de Rolle.

Théorème :

Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \exists c \in]a,b[: \quad f'(c) = 0$$

4.11 Théorème des accroissements finis.

Théorème :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$,

$$\textbf{Si } \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{cases} \quad \textbf{alors} \text{ il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Théorème : *(Plusieurs versions du même théorème)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I,

① **Si** a et b sont deux éléments de I , **alors** il existe $c \in I$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

② **Si** a et b sont deux éléments de I , **alors** il existe $c \in I$ tel que $|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \times |b - a|$.

4.12 Dérivée et sens de variations.

Théorème :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I,

❶ $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$ **si, et seulement si,** f est croissante sur I.
❷ $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$ **si, et seulement si,** f est décroissante sur I.
❸ $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$ **si, et seulement si,** f est constante sur I.

Attention : *Ces théorèmes sont faux lorsque I n'est pas un intervalle.*

Théorème :

❶ **Si** $\begin{cases} f \text{ est continue sur l'intervalle } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ \forall x \in]a,b[, \quad f'(x) > 0 \end{cases}$ **alors** f est strictement croissante sur $[a, b]$.

❷ **Si** $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur l'intervalle } I \\ \forall x \in I, \ f'(x) > 0 \ \textbf{sauf en un nombre fini de points.} \end{cases}$ **alors** f est strictement croissante sur I.

On peut énoncer des théorèmes du même type pour les fonctions strictement décroissantes.