Fonctions réelles.

5 septembre 2024

Table des matières

1 Généralités **2**
1.1 Majoration, minoration. 2
1.2 Maximum d'une fonction à valeurs réelles. 2
1.3 Sens de variations. 2

2 Limite d'une fonction. **3**
2.1 Limite réelle en x_0 ou en ∞. 3
2.2 Limite infinie 4
2.3 Limites et inégalités. 4
2.4 Opérations et limites 5
2.5 Echelle de comparaison. (*Croissances comparées*) 6
2.6 Théorème de limite monotone. 6

3 Continuité sur un intervalle. **7**
3.1 Généralités. 7
3.2 Opérations et continuité. 7
3.3 Théorème des valeurs intermédiaires. 7
3.4 Théorème de la bijection. 8
3.5 Image continue d'un segment. 8

4 Dérivation. **9**
4.1 Définitions 9
4.2 Continuité et dérivabilité. 9
4.3 Tangente à une courbe. 9
4.4 Dérivée des fonctions usuelles. 10
4.5 Opérations et dérivation. 10
4.6 Composée et fonctions dérivables. 10
4.7 Dérivée de la réciproque. 10
4.8 Dérivée d'ordre supérieur. 11
4.9 Extremum local d'une fonction dérivable. 11
4.10 Théorème de Rolle. 12
4.11 Théorème des accroissements finis. 12
4.12 Dérivée et sens de variations. 12

1

Généralités

1.1 Majoration, minoration.

Définition :

Soient f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E une partie de D_f $(E \subset D_f)$,
Dire que f est majorée sur E signifie que : $\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in E, \quad f(x) \leqslant M.$

On définit de même : f est minorée ou bornée sur E.

1.2 Maximum d'une fonction à valeurs réelles.

Définition : *(maximum global)*

Soient f une fonction définie sur D et M un réel Dire que M est le maximum de f sur D signifie que : M est un majorant de f et il existe $x_0 \in D$ tel que $M = f(x_0)$ On note : $\max\limits_{x \in D}(f(x))$.

On définit de même le minimum d'une fonction sur un ensemble D.

Définition : *(maximum local)*

Soient f une fonction et M un réel Dire que M est un maximum local de f signifie que : Il existe $x_0 \in D_f$ et $\varepsilon > 0$ tels que $M = f(x_0)$ et M est le maximum de f sur $D_f \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

On définit de même un minimum local d'une fonction.

1.3 Sens de variations.

Définition :

Soit f une fonction définie sur D, Dire que f est **croissante** sur D signifie que : $\forall (a, b) \in D^2, \ a < b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$ Dire que f est **strictement croissante** sur D signifie que : $\forall (a, b) \in D^2, \ a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$

On définit de même décroissante et strictement décroissante.

Théorème : (*Propriétés des fonctions strictement monotones*)

Si f est strictement croissante sur D alors	①	$\forall (a, b) \in D^2, \quad a = b \iff f(a) = f(b)$
	②	$\forall (a, b) \in D^2, \quad a < b \iff f(a) < f(b)$
	③	$\forall (a, b) \in D^2, \quad a \leqslant b \iff f(a) \leqslant f(b)$
Si f est strictement décroissante sur D alors	①	$\forall (a, b) \in D^2, \quad a = b \iff f(a) = f(b)$
	②	$\forall (a, b) \in D^2, \quad a < b \iff f(a) > f(b)$
	③	$\forall (a, b) \in D^2, \quad a \leqslant b \iff f(a) \geqslant f(b)$

2

Limite d'une fonction.

2.1 Limite réelle en x_0 ou en ∞.

2.1.1 En $-\infty$ ou $+\infty$

Définition :

Soient ℓ un réel et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
Dire que $\boldsymbol{f}$ **tend vers** $\boldsymbol{\ell}$ **en** $\boldsymbol{+\infty}$ signifie que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel ℓ (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{+\infty} f = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Définition :

Soient ℓ un réel et f une fonction définie au voisinage de $-\infty$.
Dire que $\boldsymbol{f}$ **tend vers** $\boldsymbol{\ell}$ **en** $\boldsymbol{-\infty}$ signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \leqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel ℓ (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{-\infty} f = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$$

2.1.2 En x_0

Soient ℓ et x_0 deux nombres réels, et f une fonction définie au voisinage de x_0.
Dire que $\boldsymbol{f}$ **tend vers** $\boldsymbol{\ell}$ **en** $\boldsymbol{x_0}$ signifie que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel ℓ (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x_0} f = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$$

Définition :

Dire que f est **continue** en x_0 signifie que : f est définie en x_0 et que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Autrement dit : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0| \leqslant \varepsilon$

2.2 Limite infinie

Définitions :

Soit f une définie au voisinage de $\boldsymbol{x_0}$,

Ecrire : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A$

Ecrire : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant A$

Soit f une définie au voisinage de $\boldsymbol{+\infty}$,

Ecrire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A$

Ecrire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A$

Soit f une définie au voisinage de $\boldsymbol{-\infty}$,

Ecrire : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A$

Ecrire : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A$

2.3 Limites et inégalités.

2.3.1 Lorsqu'on sait que les fonctions ont des limites réelles.

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de α,

❶ Si $\lim\limits_{\alpha} f = \ell$ et si $\ell > 0$ alors au voisinage de α, $f(x) > 0$.

❷ Si f et g admettent une limite réelle en α et si $\lim\limits_{\alpha} f < \lim\limits_{\alpha} g$ alors au voisinage de α, $f(x) < g(x)$.

Théorème :

❶ Si $\left|\begin{array}{l} \text{au voisinage de } \alpha, \quad f(x) \geqslant 0 \\ \text{et } \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell \end{array}\right.$ alors $\ell \geqslant 0$.

❷ Si $\left|\begin{array}{l} f(x) \leqslant g(x) \text{ au voisinage de } \alpha, \\ \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell' \end{array}\right.$ alors $\ell \leqslant \ell'$

2.3.2 Théorèmes de comparaison.

Théorèmes :

① Si $\left|\begin{array}{l} \text{au voisinage de } \alpha\ ,\ f(x) \leqslant g(x) \\ \text{et } \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty \end{array}\right.$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$ existe et vaut $+\infty$.

② Si $\left|\begin{array}{l} \text{au voisinage de } \alpha\ ,\ g(x) \leqslant f(x) \\ \text{et } \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty \end{array}\right.$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$ existe et vaut $-\infty$.

③ Si $\left|\begin{array}{l} \text{au voisinage de } \alpha\ ,\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \\ \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \ell \end{array}\right.$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe et vaut ℓ.

Corollaires :

① Si $\left|\begin{array}{l} \text{au voisinage de } \alpha\ ,\ |f(x) - \ell| \leqslant g(x) \\ \text{et } \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0 \end{array}\right.$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe et vaut ℓ.

② Si $\left|\begin{array}{l} \text{au voisinage de } \alpha,\ f(x) = g(x) \times h(x) \\ \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0 \\ \text{et au voisinage de } \alpha,\ h \text{ est bornée.} \end{array}\right.$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe et vaut 0.

2.4 Opérations et limites

ℓ et ℓ' désignent deux réels, α désigne soit un réel x_0 , soit $+\infty$, soit $-\infty$.

2.4.1 Limite de la somme de deux fonctions : $f + g$

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'			
$+\infty$			
$-\infty$			

2.4.2 Limite du produit de deux fonctions : $(f \times g)$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$				
$+\infty$				
$-\infty$				
0				

2.4.3 Limite du quotient de deux fonctions : $\left(\dfrac{f}{g}\right)$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$				
$+\infty$				
$-\infty$				
0^+				
0^-				

2.4.4 Limites et composées.

Théorème : (*Composée de deux fonctions.*)

Soit f et g deux fonctions telles que f est définie au voisinage de α, g de β et $g \circ f$ de α,

$$\text{Si} \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta \\ \quad \text{et} \\ \lim\limits_{y\to\beta} g(y) = \gamma \end{array} \right. \qquad \text{alors} \quad \lim\limits_{x\to\alpha} g\big(f(x)\big) = \gamma$$

Théorème : (*Composée d'une suite et d'une fonction.*)

> Soit f une fonction définie au voisinage de α et (u_n) une suite à valeurs dans D_f.
>
> Si $\left| \begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta \end{array} \right.$ alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers β quand n tend vers $+\infty$.

2.5 Echelle de comparaison. (*Croissances comparées*)

Proposition.

> Pour $a \in]0;+\infty[$, (a **un réel strictement positif**)
>
> $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$$

Remarques :

❶ On peut ajouter $\lim\limits_{x\to 0} (x^a \ln(x)) = 0$

❷ On se réfère toujours à une de ces limites pour justifier une "croissance comparée".

2.6 Théorème de limite monotone.

Théorème :

> Soit f une fonction, α et β désignent des réels, $+\infty$ ou $-\infty$
>
> Si f est monotone sur l'intervalle $\big]\,\alpha;\beta\,\big[$
>
> alors f admet une limite (réelle ou infinie) à droite en α et à gauche en β.

Démonstration. *(Conséquence du théorème de la borne supérieure)*

En situation :

- si f est croissante sur $]a,+\infty[$ et si f est minorée alors f admet une limite réelle en a.
- si f est croissante sur $]a,+\infty[$ alors f admet une limite à droite en a, une limite réelle ou $+\infty$.
- si f est décroissante sur $]a,b[$ et si f est majorée alors f admet une limite réelle à droite en a.
- si f est décroissante sur $]a,b[$ alors f admet à gauche en b une limite réelle ou $-\infty$.
- si f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et si f est minorée alors f admet une limite réelle en $+\infty$.
- si f est décroissante sur $\mathbb{R}$ alors f admet une limite en $-\infty$, une limite réelle ou $+\infty$

Remarques :

- Si f est croissante sur $[a,b]$ alors f n'a pas nécessairement une limite en b,
  en revanche elle a une limite à gauche en b.
  Prendre par exemple la fonction partie entière sur $[0,1]$.
- On utilise souvent ce théorème en construisant un tableau de variations.

Corollaire :

> Soit f une fonction, α et β désignent des réels, $+\infty$ ou $-\infty$
>
> Si f est croissante sur l'intervalle $\big]\,\alpha\,;\,\beta\,\big[$ alors on a les équivalences suivante :
>
> ❶ f admet une limite réelle à gauche en β si, et seulement si, f est majorée.
>
> ❷ f admet une limite réelle à droite en α si, et seulement si, f est minorée.

3

Continuité sur un intervalle.

Les fonctions f, g, .. sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et sont chacunes définies sur une partie de $\mathbb{R}$: D_f, D_g, ...

3.1 Généralités.

Définition :

Soit $D \subset D_f$ tel que f est définie au voisinage de tout x_0 de D.
Dire que f est continue sur D signifie que : f est continue en tout x_0 de D.

3.2 Opérations et continuité.

Théorème :

Si f et g sont continues sur D **alors** $f+g$, $f \times g$ sont continues sur D.
si de plus g ne s'annule pas sur D **alors** $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.

Théorème :

Soient I, J deux intervalles, $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions,

$$\textbf{Si} \begin{cases} ① \ f \text{ est continue sur } I \\ ② \ g \text{ est continue sur } J \\ ③ \ \forall x \in I, \quad f(x) \in J \end{cases} \quad \textbf{alors} \quad g \circ f \text{ est continue sur } I.$$

3.3 Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème :

Version 1 : Si f est continue sur un intervalle I et a et b sont deux éléments de I,
alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet *au moins* une solution dans $[a, b]$.

Version 2 : Soit I une partie de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I et f une fonction défiie sur I.

$$\textbf{Si} \begin{cases} ① \ f \text{ est continue sur } I \\ ② \ I \text{ est un intervalle} \\ ③ \ f(a) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f(b \geqslant 0 \end{cases} \quad \textbf{alors} \text{ il existe } (\textit{au moins}) \text{ un réel } c \in I \quad \text{tel que} \quad f(c) = 0.$$

Version 3 : Si I est un intervalle et f est une fonction continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.
L'image continue d'un intervalle est un intervalle.

3.4 Théorème de la bijection.

Théorème :

Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I,

Si $\begin{cases} ① \ I \text{ est un intervalle} \\ ② \ f \text{ est continue sur } I \\ ③ \ f \text{ est strictement monotone sur } I \end{cases}$ alors $\begin{cases} ❶ \ f(I) \text{ est un intervalle} \\ ❷ \ f \text{ réalise une bijection de } I \text{ dans } f(I) \end{cases}$

Ce théorème est rarement utilisé tel quel, mais il en découle toutes les versions utilisées :

Théorème de la bijection (*avec toutes les situations possibles*) :

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors f réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$

Si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors f réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[f(b), f(a)]$

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$,
alors f réalise une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]\lim\limits_{\alpha} f, \lim\limits_{\beta} f[$

Si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$,
alors f réalise une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]\lim\limits_{\beta} f, \lim\limits_{\alpha} f[$

$\ldots$

Propositions (*Versions utilisées en pratique*) :

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors $\forall k \in [f(a), f(b)], \exists! \alpha \in [a, b] : \ f(\alpha) = k$

Si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors $\forall k \in [f(b), (a)], \exists! \alpha \in [a, b] : \ f(\alpha) = k$

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$,
alors $\forall k \in]\lim\limits_{\alpha} f, \lim\limits_{\beta} f[, \exists! \alpha \in [a, b] : \ f(\alpha) = k$

$\ldots$

Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I,

on note : $g : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et g^{-1} sa bijection réciproque.

- g^{-1} est une bijection de $f(I)$ dans I.
- g^{-1} est continue. (*La réciproque d'une bijection continue est continue*)
- g^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que g.

Remarque : Il est simple de construire le tableau de variation de g^{-1}, connaissant celui de g.

3.5 Image continue d'un segment.

Théorème :

L'image directe d'un segment par une fonction continue est segment.

Remarques :

- Si f est continue sur le segment $[a, b]$ alors il existe $(x_1, x_2) \in [a, b]^2$: tel que $f\big([a, b]\big) = \big[f(x_1), f(x_2)\big]$.
- Si f est continue sur le segment $[a, b]$ alors elle est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes *(sup et inf)*.

4

Dérivation.

4.1 Définition

Définition :

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in D$, (f *est définie en* x_0)

Dire que f est dérivable en x_0 signifie que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite réelle quand x tend vers x_0.

Cette limite s'appelle alors **le nombre dérivé** de f en x_0.

4.2 Continuité et dérivabilité.

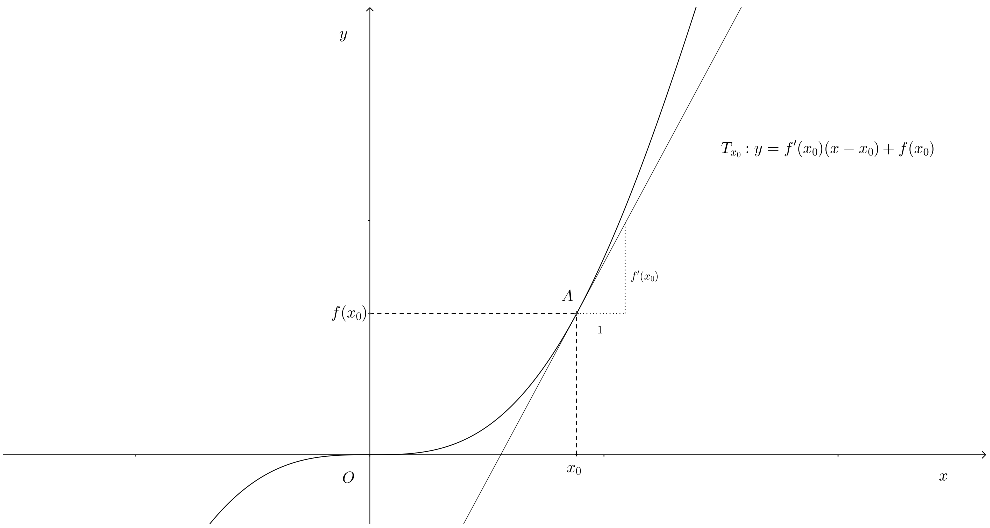
Si f est dérivable en x_0 **alors** f est continue en x_0.

4.3 Tangente à une courbe.

Définition.

Lorsque f dérivable en x_0.
La droite passant par $A(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$ est appelée **tangente** à la courbe d'équation $y = f(x)$.

C'est la position limite de la corde passant par les points de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$



Proposition.

L'équation de la tangente à C_f en $A(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

4.4 Dérivée des fonctions usuelles.

Fonction	dérivée
$x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \longmapsto a^x$	$x \longmapsto \ln(a)a^x$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$
$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$	$x \longmapsto \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$

Fonction	dérivée
$x \longmapsto \ln(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto \cos(x)$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto -\sin(x)$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto 1 + \tan^2(x)$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$x \longmapsto \arctan(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

4.5 Opérations et dérivation.

Théorème :

Soient α, β deux réels et f, g deux fonctions définies sur un intervalle I,

Si f et g sont dérivables sur I alors :

❶ $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$.

❷ $f\,g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I alors :

❸ $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{1}{g}$ sont dérivables sur I et $\forall x \in I$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

4.6 Composée et fonctions dérivables.

Théorème :

Soient I et J deux intervalles, $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I, \\ g \text{ est dérivable sur } J, \\ \text{et } \forall x \in I, \quad f(x) \in J \end{cases} \quad \textbf{alors} \quad \begin{cases} g \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ \qquad \text{et} \\ \forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) \end{cases}$$

4.7 Dérivée de la réciproque.

Théorème :

Soient f une bijection continue et strictement monotone de I dans $f(I)$, $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$.

1er cas : Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

2ème cas : Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$ alors

f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et $C_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point d'abscisse y_0.

Corollaire :

Soit f une bijection continue et strictement monotone de I sur $f(I)$,
Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et :

$$\forall x \in f(I), \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

4.8 Dérivée d'ordre supérieur.

4.8.1 Définition de la dérivée n ième .

Définition : (fonctions n fois dérivables)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. (on note $f = f^{(0)}$)
Dire que : f est (*au moins*) n fois dérivable sur I,
signifie que : successivement pour tout k compris entre 1 et n,

$$f^{(k-1)} \text{ est dérivable sur } I \text{ et on note } f^{(k)} \text{ sa dérivée.}$$

4.8.2 Fonctions de classe C^n .

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I,
Dire qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I signifie qu'elle est n fois dérivable et que $\boldsymbol{f^{(n)}}$**est continue** sur I.

Dire que f est indéfiniment dérivable sur I signifie que pour tout entier naturel n, la fonction f est n fois dérivable sur I (on dit alors que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I).

4.8.3 Dérivées successives et opérations.

Théorèmes :

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et α, β deux réels.

① Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(I)$ alors $\alpha f + \beta g$ et $f\,g$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

② Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(I)$ et si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

③ Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$, $g \in \mathcal{C}^n(J)$ et si $f(I) = J$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$

On peut énoncer les mêmes théorèmes en remplaçant tous les $\mathcal{C}^n$ par des $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème :

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et α, β deux réels.
Si f et g sont n fois dérivables sur I alors $\alpha f + \beta g$ est n fois dérivable sur I et $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$

4.9 Extremum local d'une fonction dérivable.

Théorème : (condition d'existence d'un extremum local sur un ouvert)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I qui n'est pas une borne de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f \text{ admet un extremum local en } a \end{cases} \quad \text{alors} \quad f'(a) = 0$$

4.10 Théorème de Rolle.

Théorème :

Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \exists c \in]a,b[: \quad f'(c) = 0$$

4.11 Théorème des accroissements finis.

Théorème :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$,

$$\textbf{Si} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{array} \right. \quad \textbf{alors} \text{ il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème : *(Plusieurs versions du même théorème)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I,

① **Si** a et b sont deux éléments de I , **alors** il existe $c \in I$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

② **Si** a et b sont deux éléments de I , **alors** il existe $c \in I$ tel que $|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \times |b - a|$.

On peut assez rapidement en déduire les propositions suivantes.

4.12 Dérivée et sens de variations.

Théorème :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I,

❶ $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$ **si, et seulement si,** f est croissante sur I.

❷ $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$ **si, et seulement si,** f est décroissante sur I.

❸ $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$ **si, et seulement si,** f est constante sur I.

Attention : *Ces théorèmes sont faux lorsque I n'est pas un intervalle.*

Théorème :

$$\textbf{❶ Si} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur l'intervalle } \big[a,b\big] \\ f \text{ est dérivable sur } \big]a,b\big[\\ \forall x \in \big]a,b\big[, \quad f'(x) > 0 \end{array} \right. \quad \textbf{alors } f \text{ est strictement croissante sur } \big[a,b\big].$$

$$\textbf{❷ Si} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur l'intervalle } I \\ \forall x \in I, \ f'(x) > 0 \ \textbf{ sauf en un nombre fini de points.} \end{array} \right. \quad \textbf{alors } f \text{ est strictement croissante sur } I.$$

On peut énoncer des théorèmes du même type pour les fonctions strictement décroissantes.