Correction du devoir surveillé du 7 septembre 2024

Exercice 0

1) Soit $p \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} - p(1-p) &= \frac{1}{4} - p + p^2 \\ &= \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \quad \geqslant 0\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } p \in [0,1],\ \ p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}}$

2) $f : x \longmapsto \cos^{n+1}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, *($f = u^{n+1}$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f' = (n+1)u'u^n$)*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -(n+1)\sin(x)\cos^n(x)}$$

Exercice 1

1) La fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$,($f = \frac{u}{v}$ avec u et v dérivables, $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$)

Pour $x \in [1;+\infty[$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(\ln(x)+1)(x+1) - x\ln(x)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{\ln(x)+x+1}{(x+1)^2} \\ &> 0 \qquad\qquad (\textit{car } x \geqslant 1)\end{aligned}$$

En remarquant que $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \times \ln(x)$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

et ainsi :

x	1	$+\infty$
f	0 ↗	$+\infty$

2) *(J'ai cherché la rédaction qui évitera les erreurs).*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ donc *(Théorème de la bijection)*

❶ $f([1,+\infty[) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0;+\infty[$

❷ f est bijective de $[1,+\infty[$ dans $[0;+\infty[$

or $n \in [0;+\infty[$ donc *(définition d'une bijection)* ,

il existe un unique $\alpha \in [1,+\infty[$ tel que $f(x) = n$

Autrement dit : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'équation } f(x) = n \text{ admet une unique solution sur } [1,+\infty[}$

3) D'une part $e^n \in [1;+\infty[$ et $f(e^n) = \dfrac{ne^n}{e^n+1} = n \times \dfrac{e^n}{e^n+1}$ donc $f(e^n) < n$.

D'autre part par définition de α_n, $\alpha_n \in [1;+\infty[$ et $f(\alpha_n) = n$.

on a $f(e^n) < f(\alpha_n)$ et comme de plus f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ on en déduit bien

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n > e^n}$$

on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{n}{\alpha_n} \leqslant \dfrac{n}{e^n}$

or *(croissances comparées)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$ donc *(théorème des gendarmes)* :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\alpha_n} = 0}$$

4) Raisonnons par équivalence pour un $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_n}{e^n} = e^{\frac{n}{\alpha_n}} &\iff \ln(\alpha_n) - n = \frac{n}{\alpha_n} \\
&\iff \alpha_n \ln(\alpha_n) - n\alpha_n = n \\
&\iff \frac{\alpha_n \ln(\alpha_n)}{1+\alpha_n} = n \\
&\iff f(\alpha_n) = n
\end{aligned}$$

or on sait que $f(\alpha_n) = n$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\alpha_n}{e^n} = e^{\frac{n}{\alpha_n}}}$$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\alpha_n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{e^n} = e^{\frac{n}{\alpha_n}}$ donc $\dfrac{\alpha_n}{e^n} = 1$. Autrement dit $\boxed{\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n}$

Exercice 2

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc $\boxed{(S_n) \text{ est strictement croissante.}}$

b) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
D_{n+1} - D_n &= S_{2n+2} - S_{n+1} - S_{2n} + S_n \\
&= S_{2n+2} - S_{2n} - (S_{n+1} - S_n) \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \quad > 0
\end{aligned}$$

donc $\boxed{(D_n) \text{ est croissante}}$

ii. (D_n) est croissante et $D_1 = 1 + \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{2} > 0$ donc $\boxed{(D_n) \text{ ne converge pas vers } 0}$

En effet, sachant que pour tout n, $D_n \geqslant D_1$, si (D_n) convergeait vers 0, alors on aurait : $0 \geqslant \dfrac{1}{2}$

c) Si (S_n) convergeait alors la suite $(D_n) = (S_{2n} - S_n)$ convergerait vers 0,
or on vient de voir que (D_n) ne converge pas vers 0 donc (S_n) ne converge pas,
or (S_n) est croissante donc $\boxed{(S_n) \text{ diverge vers } +\infty}$

2) a) (S_n) diverge vers $+\infty$ donc $\quad \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, \quad S_n \geqslant A$

En particulier $\boxed{\text{il existe un entier } n \text{ pour lequel } S_n \geqslant 10}$

b)

```
n = 1
s = 1
while s < 10:
    n += 1
    u += 1/n
print(n)
```

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= S_{2n} - S_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ A_{2n} = D_n}$$

b) pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} D_n &= S_{2n} - S_n \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \end{aligned}$$

$$\boxed{D_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}}$$

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{avec } f : x \longmapsto \frac{1}{x+1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$ donc

$$\boxed{(D_n) \text{ converge vers } \ln(2)}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n} = D_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = \ln(2)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_{2n} = \ln(2)$

de plus pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad A_{2n+1} = A_{2n} + \dfrac{1}{2n+1} \quad$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_{2n+1} = \ln(2)$

ce qui permet d'affirmer que *(théorème des suites extraites)* :

$$\boxed{(A_n) \text{ converge vers } \ln(2)}$$

4) a)

$$\begin{aligned} B_6 &= \sum_{k=1}^{6} u_{\sigma(k)} \\ &= u_1 + u_2 + u_4 + u_3 + u_6 + u_8 \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\boxed{B_6 = \frac{7}{24}}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} &= \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3n} u_{\sigma(k)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(u_{\sigma(3k-2)} + u_{\sigma(3k-1)} + u_{\sigma(3k)}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(u_{2k-1} + u_{4k-2} + u_{4k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \qquad \text{(question 3) c.} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{3n} u_{\sigma(k)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} u_k}$$

d) Sachant que la série (A_n) converge vers $\ln(2)$, la relation précédente permet d'affirmer que (B_{3n}) converge vers $\dfrac{\ln(2)}{2}$. on a, de plus, les relations :

$$B_{3n+1} = B_{3n} + \frac{1}{2n+1} \qquad B_{3n+2} = B_{3n+1} - \frac{1}{4n+2}$$

qui montrent que (B_{3n+1}) et (B_{3n+2}) convergent aussi vers $\dfrac{\ln(2)}{2}$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (B_n) \text{ converge vers } \frac{\ln(2)}{2}}$$

5) En étudiant (A_n) on somme les éléments de U dans un certain ordre et on trouve une limite égale à $\ln(2)$.
En étudiant (B_n) on somme les éléments de U dans un certain ordre et on trouve une limite égale à $\dfrac{\ln(2)}{2}$.
On trouve deux résultats différents, il semble difficile de parler de la somme des éléments de U.

Pour aller plus loin *(mais pas si loin du programme de BCPST)* : "Théorème de réarrangement de Riemann"

Exercice 3

Partie 1.

1) • On note g la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$,

g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\forall x \in [0;+\infty[, \quad g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} \geqslant 0$

donc g est croissante ce qui avec $g(0) = 0$ permet d'affirmer que $\forall x \in [0;+\infty[, \quad g(x) \geqslant 0$.

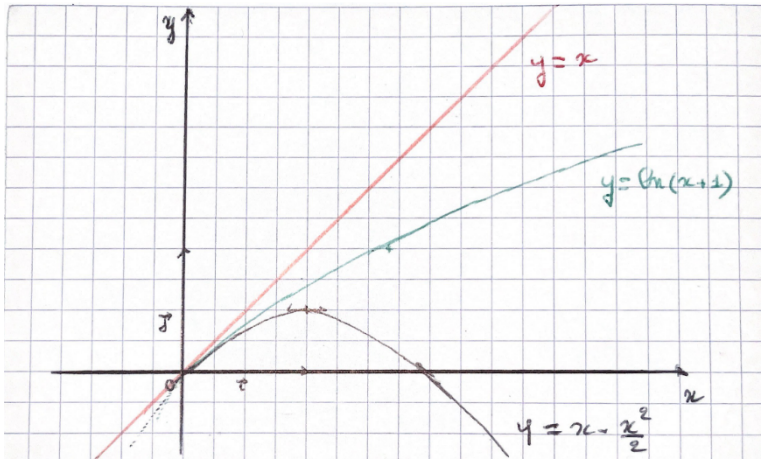
ce qui entraîne bien : $\boxed{\forall x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) \leqslant x}$

• On note ici $g : x \mapsto \ln(1+x) + \dfrac{x^2}{2} - x$,

g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\forall x \in [0;+\infty[, \quad g'(x) = \dfrac{x^2}{1+x} \geqslant 0$, g est croissante sur $[0;+\infty[$ et comme $g(0) = 0$, on obtient l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$

$$\boxed{\forall x \in [0;+\infty[, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x}$$

2) Pour tracer la parabole $y = x - \dfrac{x^2}{2}$ on remarque que $x - \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{2}x(2-x)$



Partie 2.

1) $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = u_1 \times \left(1 + \dfrac{1}{4}\right)$ et $u_3 = u_2 \times \left(1 + \dfrac{1}{8}\right)$ donc $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_3}{u_2}$

$\boxed{(u_n) \text{ n'est pas géométrique.}}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : P_n la propriété : "$u_n > 0 \quad$ et $\quad \ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$"

• Pour $n = 1$,

d'une part : $u_1 = \dfrac{3}{2} > 0$ et $\ln(u_1) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$, d'autre part : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^{k+1}}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

donc P_1 est vraie

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n est vraie,

$u_n > 0$ et $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ donc $u_{n+1} > 0$ et

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1}) &= \ln(u_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \qquad \textit{avec l'hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \qquad \textit{On a ainsi montré } P_{n+1}
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1, \quad \ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}$$

3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

or $\dfrac{1}{2^k} \geqslant 0$ donc,

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^k} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$$

en sommant pour k entre 1 et un entier naturel n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1, \quad S_n - \frac{1}{2} T_n \leqslant \ln(u_n) \leqslant S_n}$$

4) a) On reconnaît des sommes de premiers termes de suites géométriques,

$$S_n = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \qquad T_n = \frac{1}{4} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = 1 - \frac{1}{2^n} \text{ et } T_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}$$

b) On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0, \quad$ lorsque $q \in]-1;1[$ donc les deux relations précédentes donnent :

$$\boxed{(S_n) \text{ converge vers } 1 \text{ et } (T_n) \text{ vers } \frac{1}{3}}$$

5) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ (*d'après 3)*) donc

$$\boxed{(\ln(u_n)) \text{ est une suite croissante}}$$

b) Sachant que $(\ln(u_n))$ est croissante et que la fonction exponentielle est croissante on peut affirmer que :

(u_n) est une suite croissante

De plus d'après les questions 4) et 5) , on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(u_n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{2^n} \leqslant 1$

(u_n) est majorée (par e)

On a montré que (u_n) est une suite croissante et majorée donc :

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$$

c) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exp\left(S_n - \dfrac{T_n}{2}\right) \leqslant u_n \leqslant \exp(S_n)$

de plus (*continuité de la fonstion exponentielle*),

$$\lim_{n \to +\infty} \exp\left(S_n - \frac{T_n}{2}\right) = \exp\left(\frac{5}{6}\right) \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \qquad \lim_{n \to +\infty} \exp(S_n) = \exp(1)$$

donc *(passage à la limite sur des inégalités larges)* :

$$\boxed{e^{\frac{5}{6}} \leqslant \ell \leqslant e}$$