Table des matières

1 Définitions. vocabulaire. notation.

Définition

Soit m un entier naturel non nul et $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels.

Etudier la série de terme général u_n signifie étudier la suite $\left(\sum_{k=m}^{n} u_k\right)_{n\geqslant m}$ *(on note $((S_n)_{n\geqslant m}$ cette suite)*

La série de terme général u_n est notée : $\sum_{n\geqslant m} u_n$.

- Les $S_n = \sum_{k=m}^{n} u_k$ sont les **sommes partielles de la série** $\sum_{n\geqslant m} u_n$.
- Dire que la série $\sum_{n\geqslant m} u_n$ est **convergente** signifie que (S_n) est convergente.
- Si (S_n) est converge vers le réel ℓ alors ℓ est appelé **somme de la série** $\sum_{n\geqslant m} u_n$.

  et dans ce cas on note : $\sum_{k=m}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n \quad (= \ell)$
- Dire que la série $\sum_{n\geqslant m} u_n$ est **divergente** signifie que (S_n) est divergente.

Exemples : *Voir la feuille_cours_1.*

En pratique : Pour étudier la nature d'une série :

- on étudie la convergence de la suite (S_n) définie par : $S_n = \sum_{k=m}^{n} u_k$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=m}^{n} u_k \\ &= ... \\ &= ... \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{aligned}$$

- on conclut en utilisant le vocabulaire des séries :

  Lorsque (S_n) converge vers ℓ, on dit que la série $\sum_{n\geqslant m} u_n$ converge et que sa somme $\sum_{k=m}^{+\infty} u_k$ est égale à ℓ.

  Lorsque (S_n) diverge vers ℓ, on dit que la série $\sum_{n\geqslant m} u_n$ diverge.

Remarques :

La suite (S_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant m} u_n$

Lorsque (S_n) converge vers ℓ, on dit que la somme "$\sum_{k=m}^{+\infty} u_k$ **existe**" et vaut ℓ.

2 Des premiers résultats

2.1 Indice de départ.

Proposition

Soit $(u_n)_{n \geqslant m}$ une suite de réels et n_1 et n_2 deux entiers naturels supérieurs à m,

La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_1} u_n$ est convergente si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_2} u_n$ est convergente.

Démonstration : On suppose que $n_1 < n_2$

$$\forall n \geqslant n_2, \qquad \sum_{k=n_1}^{n} u_k \quad = \quad \underbrace{\sum_{k=n_1}^{n_2-1} u_k}_{\text{ne dépend pas de } n} \quad + \quad \sum_{k=n_2}^{n} u_k$$

donc les deux suites $\left(\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n} u_k\right)$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=n_2}^{n} u_k\right)$ convergent simultanément.

Remarque : en cas de convergence, toujours avec $n_1 < n_2$, on a

$$\sum_{k=n_1}^{+\infty} u_k \quad = \quad \sum_{k=n_1}^{n_2-1} u_k \quad + \quad \sum_{k=n_2}^{+\infty} u_k$$

Remarques :

- On dit aussi que les séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_2} u_n$ ont même nature.
- La nature d'une série ne dépend pas des premiers termes.
- Quand on demande la nature de la série, il est inutile de donner le premier indice.
- On peut ne rien mettre sous la somme. " Déterminer la nature de $\sum u_n$ ".

2.2 Une condition nécessaire de convergence.

Théorème.

Soit $(u_n)_{n \geqslant m}$ une suite de réels,

Si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant m} u_n$ est convergente alors la suite (u_n) tend vers 0.

Démonstration : *Voir Feuille_cours_1. Cela vient de la relation* $u_n = S_n - S_{n-1}$.

En pratique on utilise souvent la forme *contraposée* de cette implication :

Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0 alors la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant m} u_n$ est **divergente**

Attention la *réciproque* est fausse. Contre-exemple : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente et pourtant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

Trop nombreux sont ceux qui font l'erreur de raisonnement de dire que la série converge lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.3 Séries télescopiques.

Proposition. *(Complément)*

Soit (a_n) une suite réelle quelconque, on note (u_n) la suite définie par $u_n = a_{n+1} - a_n$,

La série de terme général u_n converge si, et seulement si, la suite (a_n) est convergente.

et en cas de convergence : $\displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} a_n \; - \; a_m$

En pratique on le redémontre, car il y a plusieurs situations possibles : $u_n = a_{n-1} - a_n$, $u_n = a_n - a_{n+1}$ ...

En effet :

2.4 Combinaisons linéaires de séries convergentes

Théorème

Soient $(u_n)_{n\geqslant m}$ et $(v_n)_{n\geqslant m}$ deux suites de réels, α et β deux réels.

Si les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant m} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant m} v_n$ sont convergentes alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant m}(\alpha u_n + \beta v_n)$ est convergente.

et alors : $\displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty}(\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha\sum_{k=m}^{+\infty} u_k + \beta\sum_{k=m}^{+\infty} v_k$

En effet :
On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent,
Pour $n \geqslant m$

$$\sum_{k=m}^{n}(\alpha u_k + \beta v_k) \quad = \quad \alpha\sum_{k=m}^{n} u_k + \beta\sum_{k=m}^{n} v_k \qquad \textit{(Propriétés des sommes)}$$

or les deux séries convergent donc $\displaystyle\left(\sum_{k=m}^{n}(\alpha u_k + \beta v_k)\right)_{n\geqslant m}$ converge.

On a aussi l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n) \; = \; \alpha\sum_{n=m}^{+\infty} u_n + \beta\sum_{n=m}^{+\infty} v_n$

Corollaire

Pour $\alpha \neq 0$,

$\displaystyle\sum_{n\geqslant m} u_n$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{n\geqslant m}\alpha u_n$ converge.

En effet :

2.5 Séries $\sum u_n$ où (u_n) est à support fini.

Proposition.

> Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels,
> S'il existe un rang N à partir duquel $u_n = 0$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.
> $$\text{et alors :} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k$$

En effet :

Phrase de rédaction : "La somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe car (u_n) est à support fini."

Exemples : $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{10}{k}$ existe et vaut

Lien avec les fonctions polynômiales réelles :

Dire qu'une fonction P est polynomiale signifie qu'il existe une suite (a_n) nulle à partir d'un certain rang telle que :

$$P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

2.6 Séries à termes positifs.

Deux résultats à redémontrer dans une copie.

Proposition. *(Complément)*

> Soit $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels,
> Si (u_n) est à **termes positifs ou nuls** alors la suite $\left(\sum_{k=m}^{n} u_k\right)_{n\geqslant m}$ est croissante.

En effet :

Proposition. *(Complément)*

> Soit $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels,
> Si (u_n) est à **termes positifs ou nuls** alors on a l'équivalence suivante :
> La série $\sum_{n\geqslant m} u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant m}$ est majorée.
> et en cas de convergence on a : $\forall n \geqslant m, \quad \sum_{k=m}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=m}^{+\infty} u_k$

En effet :

3 Séries usuelles.

3.1 Séries géométriques et les dérivées.

Théorème.

Soit q un nombre réel,

❶ Série géométrique de raison q.

La série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente si, et seulement si, $-1 < q < 1$; et alors $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

❷ Série géométrique dérivée de raison q.

La série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ est convergente si, et seulement si, $-1 < q < 1$; et alors $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

❸ Série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison q.

La série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ est convergente si, et seulement si, $-1 < q < 1$

et alors $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Exemples.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = \text{................} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} = \text{................} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)2^{k-2}}{5^{k-2}} = \text{................}$$

Remarques :

- pour retrouver l'expression des séries dérivées on dérive deux fois la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$
- Pour $q \in]-1,1[$, on peut changer l'indice de départ pour les séries dérivées :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Démonstrations.

Première remarque :
Si $q \notin]-1,1[$ alors les termes généraux (q^n), (nq^{n-1}) et $(n(n-1)q^{n-2})$ ne convergent pas vers 0 donc les séries divergent dans les cas ❶ , ❷ et ❸ .

Il suffit donc d'étudier la convergence dans les trois cas avec $q \in \left]-1;1\right[$:

❶

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} q^k &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}\end{aligned}$$

❷

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kq^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)q^k - \sum_{k=1}^{n} kq^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} kq^k - \sum_{k=1}^{n} kq^k + \sum_{k=0}^{n-1} q^k\\ &= -nq^n + \sum_{k=0}^{n-1} q^k\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \frac{1}{1-q} \qquad \textit{(On utilise ❶)}\end{aligned}$$

En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} nq^n = 0$ *(limite du cours appelé "croissance comparées")*

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-q)^2}$$

❸

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} - \sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)kq^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k(k-1)q^{k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+k-k^2+k)q^{k-1} - (n+1)nq^{n-1}\\ &= 2\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} \; - (n+1)nq^{n-1}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{(1-q)^2} - 0 \qquad \textit{(On utilise ❷)}\end{aligned}$$

En effet : $(n+1)nq^{n-1} \sim \dfrac{n^2q^n}{q}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2q^n = 0$ *(limite du cours appelé "croissance comparées")*

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-q)^2}$$

Quelques sommes autour de celles-ci *(Savoir les retrouver rapidement, ne pas les apprendre)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{n=m}^{+\infty} q^{n-m} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^k = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots$$

Démonstration. *(Voir la feuille_calcul_1)* Ex 5 et 6

3.2 Série exponentielle.

Théorème.

Quel que soit le nombre réel x,

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$

Démonstration. *Voir la feuille_cours_1* Ex 9

Exemples.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\ldots\ldots \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\ldots\ldots \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\ln(2))^n}{n!}=\ldots\ldots$$

Quelques sommes autour de celle-ci *(Savoir les retrouver rapidement, ne pas les apprendre)*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\ldots\ldots \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=\ldots\ldots \qquad \sum_{n=m}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-m)!}=\ldots\ldots \qquad \ldots$$

Démonstration. *(Feuille_calcul_1)* Ex 7 et 8

3.3 Séries de Riemann.

Théorème.

❶ La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

❷ La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente. $\left(\right.$ *Complément* : sa somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$ $\left.\right)$

❸ *Complément* :

Pour $\alpha\in\mathbb{R}$,

la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha>1$

Démonstration. *(Rappel rapide, sinon revoir la feuille_cours_1)*

Pour ❶ on utilise pour $k\geqslant 1$: $\ln(k+1)-\ln(k)\leqslant\dfrac{1}{k}$ et pour ❷ on utilise pour $k\geqslant 2$: $\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$

Pour ❸ dans le cas $\alpha>1$, on utilise pour $k\geqslant 2$: $\dfrac{1}{k^\alpha}\leqslant\dfrac{1}{\alpha-1}\left((k-1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}\right)$

La démonstration de ❸ faite en classe (on utilise un théorème de convergence pour la première étape) :

- On suppose $\boxed{\alpha\leqslant 1}$,

  $1-\alpha\geqslant 0$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\exp((1-\alpha)\ln(n))\geqslant 1$ ou encore $n^{1-\alpha}\geqslant 1$,

  On peut alors affirmer que : $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad 0\leqslant\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{1}{n^\alpha}\\ \displaystyle\sum\frac{1}{n} \quad \text{diverge}\end{cases}$ ce qui entraîne *(théorème de convergence)* que :

$$\boxed{\text{la série }\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}\text{ est divergente}}$$

- On suppose $\boxed{\alpha>1}$,

Soit k un entier $\geqslant 2$,

la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $[k-1,k]$ donc $\forall x \in [k-1,k]$, $\quad \dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$

et en intégrant sur $[k-1,k]$ *(les fonctions sont continues)* il vient :

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

En sommant pour k allant de 2 à n on obtient avec la relation de Chasles :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$$

Donc la suite (S_n) est majorée.

de plus $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0 \quad$ donc $\;(S_n)$ est croissante.

La suite (S_n) est majorée et croissante donc elle converge et ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ est convergente}}$$

Remarques :

- La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée *série harmonique.*
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

  Non seulement on sait que la série diverge mais aussi que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$.
- *Complément* : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- Ne pas confondre les sommes de Riemann, les séries de Riemann et les intégrales de Riemann.

4

Théorèmes.

m désigne ici un entier naturel quelconque.

4.1 Théorème de convergence par comparaison des termes généraux positifs.

Théorème

Soient $(u_n)_{n\geqslant m}$ et $(v_n)_{n\geqslant m}$ deux suites de réels,

❶ Si $\forall n \geqslant m, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ est convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente

❷ Si $\forall n \geqslant m, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\sum u_n$ est divergente alors la série $\sum v_n$ est divergente

Attention (erreur courante) : Trop nombreux sont ceux qui passent à la somme sur l'encadrement $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Démonstration : *(Faite au tableau)*

Il suffit de faire une des deux démonstrations :
En effet, lorsque : $\forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, les deux implications suivantes sont la contraposée l'une de l'autre :

❶ Si $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n$ CV et ❷ Si $\sum u_n$ DV alors $\sum v_n$ DV.

Montrons le ❶ de ce théorème :
On suppose que $\forall n \geqslant m, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et que $\sum\limits_{n\geqslant m} v_n$ converge.

On note $S_n = \sum\limits_{n=m}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum\limits_{n=m}^{n} v_k$,

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$ et $S'_n - S'_{n-1} = v_n \geqslant 0$ donc les suites (S_n) et (S'_n) sont croissantes.
- $\sum\limits_{n\geqslant m} v_n$ converge, donc (S'_n) converge et elle est donc majorée. On note M un réel vérifiant $\forall n \geqslant m, S'_n \leqslant M$.
- $\forall k \geqslant m, \quad u_k \leqslant v_k$ donc *(en sommant pour k allant de m à un entier n)* pour tout n, $S_n \leqslant S'_n$

  et ainsi $\forall n \geqslant m, \ S_n \leqslant M$
- On a montré que la suite (S_n) est croissante et majorée (*par M*), donc elle converge.

(Théorème de convergence monotone)

En conclusion : (S_n) est convergente, autrement dit la série $\sum u_n$ converge.

Corollaire

Soient $(u_n)_{n\geqslant m}$ et $(v_n)_{n\geqslant m}$ deux suites de réels,

Si $\forall n \geqslant m \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ est convergente

alors la série $\sum u_n$ est convergente et $\sum\limits_{k=m}^{+\infty} u_k \leqslant \sum\limits_{k=m}^{+\infty} v_k$

En effet :

4.2 Théorème de convergence par équivalence des termes généraux positifs.

Théorème

Soient $(u_n)_{n\geqslant m}$ et $(v_n)_{n\geqslant m}$ deux suites de réels,

❶ Si $u_n \sim v_n$ et si $\forall n \geqslant m,\ v_n \geqslant 0$ et si $\sum v_n$ est convergente,

alors la série $\sum u_n$ est convergente

❷ Si $u_n \sim v_n$ et si $\forall n \geqslant m,\ v_n \geqslant 0$ et si $\sum v_n$ est divergente,

alors la série $\sum u_n$ est divergente

Attention : Trop nombreux sont ceux qui oublient $v_n \geqslant 0$.

Démonstration : *(légèrement différente de ce qui a été faite au tableau)*

- $u_n \sim v_n$ donc il existe (t_n) telle que $\forall n \geqslant m,\ v_n = u_n t_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 1$ donc il existe $N \geqslant m$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \dfrac{1}{2} \leqslant t_n \leqslant \dfrac{3}{2}$ et en multipliant par $u_n \geqslant 0$ on obtient :

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_n}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{3u_n}{2}$$

D'une part : Si $\sum u_n$ converge

on a alors $\forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{3u_n}{2}$ et la série $\sum \dfrac{3u_n}{2}$ converge

donc *(d'après le théorème 4.1* : $\sum v_n$ converge

D'autre part : Si $\sum u_n$ diverge

on a alors $\forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant \dfrac{u_n}{2} \leqslant v_n$ et la série $\sum \dfrac{u_n}{2}$ diverge

donc *(d'après le théorème 4.1* : $\sum v_n$ diverge

En conclusion : $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant m} u_n \text{ converge si, et seulement si, } \sum\limits_{n\geqslant m} v_n \text{ converge.}}$

– –

Une autre version de ce théorème

Théorème

Soient $(u_n)_{n\geqslant m}$ et $(v_n)_{n\geqslant m}$ deux suites de nombres réels,

Si $u_n \sim v_n$ et si $\forall n \geqslant m,\ v_n \geqslant 0$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature signifie :

$\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_n$ converge.

5 Absolue convergence.

5.1 Théorème.

Définition

Soit $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels,

Dire que la série $\sum\limits_{n\geqslant m} u_n$ est **absolument convergente** signifie que la série $\sum\limits_{n\geqslant m} |u_n|$ est convergente.

Exemples : *Voir la feuille_exo_1.*

Théorème. *(L'absolue convergence entraine la convergence)*

Soit $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels,

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente

alors elle est convergente et $\left|\sum\limits_{k=m}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=m}^{+\infty} |u_k|$

Démonstration : *(Celle faite au tableau)*

On suppose que $\sum u_n$ est absolument convergente,

On définit les deux suites (u_n^+) et (u_n^-) par :

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \qquad \text{et} \qquad u_n^- = \min(u_n, 0)$$

on remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_n^+ + u_n^-$

$$\text{or} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout } n \geqslant m, \quad 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \\ \\ \text{et} \quad \sum |u_n| \ \text{ converge} \end{array}\right. \qquad \text{donc} \quad \sum u_n^+ \text{ converge}$$

$$\text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout } n \geqslant m, \quad 0 \leqslant -u_n^- \leqslant |u_n| \\ \\ \text{et} \quad \sum |u_n| \ \text{ converge} \end{array}\right. \qquad \text{donc} \quad \sum -u_n^- \text{ converge et ainsi } \sum u_n^- \text{ converge}$$

donc *(linéarité des séries convergentes)* $\sum u_n$ converge.

On a bien démontré que :

$$\boxed{\text{si } \sum u_n \text{ est absolument convergente alors } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Attention la *réciproque* est fausse.

Contre-exemple : La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente.

5.2 Convergence commutative.

Théorème.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$

Ce résultat est admis et nous servira dans le chapitre "Probabilité".

Autrement dit :

- La valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes.
- Si la série est absolument convergente alors elle est commutativement convergente.