1

Définitions. vocabulaire. notation.

Définition

Soit m un entier naturel non nul et $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels,

Etudier la série de terme général u_n signifie étudier la suite $\left(\sum_{k=m}^{n} u_k\right)_{n\geqslant m}$ (on note $((S_n)_{n\geqslant m}$ cette suite)

La série de terme général u_n est notée : $\sum_{n\geqslant m} u_n$.

- Les $S_n = \sum_{k=m}^{n} u_k$ sont les **sommes partielles de la série** $\sum_{n\geqslant m} u_n$
- Dire que la série $\sum_{n\geqslant m} u_n$ est **convergente** signifie que (S_n) est convergente.
- Si (S_n) est converge vers le réel ℓ alors ℓ est appelé **somme de la série** $\sum_{n\geqslant m} u_n$.

  et dans ce cas on note : $\sum_{n=m}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \quad (= \ell)$
- Dire que la série $\sum_{n\geqslant m} u_n$ est **divergente** signifie que (S_n) est divergente.

Exemples : *Voir la feuille_cours_1.*

En pratique : Pour étudier la nature d'une série :

- on étudie la convergence de la suite (S_n) définie par : $S_n = \sum_{k=m}^{n} u_k$.
- on conclut en utilisant le vocabulaire des séries :

  Lorsque (S_n) converge vers ℓ, on dit que la série $\sum_{n\geqslant m} u_n$ converge et que sa somme $\sum_{n=m}^{+\infty} u_n$ est égale à ℓ.

On peut aussi dire :

Lorsque (S_n) converge vers ℓ, on dit que la somme $\sum_{n=m}^{+\infty} u_n$ existe et vaut ℓ.

Définition

Soit $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels,

Dire que la série $\sum_{n\geqslant m} u_n$ est **absolument convergente** signifie que la série $\sum_{n\geqslant m} |u_n|$ est convergente.

Exemples : *Voir la feuille_cours_1_bis.*

2

Séries usuelles.

Séries géométriques et les dérivées.

Soit q un nombre réel,

❶ Série géométrique de raison q.

La série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente si, et seulement si, $-1 < q < 1$; et alors $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

❷ Série géométrique dérivée de raison q.

La série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ est convergente si, et seulement si, $-1 < q < 1$; et alors $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

❸ Série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison q.

La série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ est convergente si, et seulement si, $-1 < q < 1$

et alors $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Exemples.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)2^{n-2}}{5^{n-2}} = \frac{2}{\left(1-\frac{2}{5}\right)^3}$$

Démonstrations. *Voir la feuille_cours_1.*

Remarques :

- pour retrouver l'expression des séries dérivées on dérive deux fois la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$
- Pour $q \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on peut changer l'indice de départ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Quelques sommes autour de celles-ci *(Savoir les retrouver rapidement, ne pas les apprendre)*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=m}^{+\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q} \qquad \sum_{n=m}^{+\infty} q^{n-m} = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^3} \qquad \dots$$

Démonstration. *(Revenir aux sommes partielles)*

Série exponentielle.

Quel que soit le nombre réel x,

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Démonstration. *Voir la feuille_cours_1*

Exemples.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln(2))^n}{n!} = 2$$

Quelques sommes autour de celle-ci *(Savoir les retrouver rapidement, ne pas les apprendre)*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = xe^x \qquad \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-m)!} = x^m e^x \qquad \ldots$$

Démonstration. *(Revenir aux sommes partielles)*

Séries de Riemann.

❶ La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

❷ La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. $\left(\right.$ *Complément* : sa somme vaut $\left.\dfrac{\pi^2}{6} \right)$

❸ *Complément* :

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$

Démonstration. *(Rappel rapide, sinon revoir la feuille_cours_1)*

Pour ❶ on utilise pour $k \geqslant 1$: $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$ et pour ❷ on utilise pour $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

Pour ❸ dans le cas $\alpha > 1$, on utilise pour $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{\alpha - 1}\left((k-1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}\right)$

La démonstration de ❸ est un bon exercice.

Remarques :

- La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée *série harmonique*.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Non seulement on sait que la série diverge mais aussi que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$.

- *Complément* : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3

Théorèmes.

m désigne ici un entier naturel quelconque.

3.1 Une condition nécessaire de convergence.

Théorème.

Soit $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels,

$$\text{Si la série } \sum_{n\geqslant m} u_n \text{ est convergente alors la suite } (u_n) \text{ tend vers } 0.$$

Démonstration : *Voir Feuille_cours_1. Cela vient de la relation* $u_n = S_n - S_{n-1}$.

En pratique on utilise souvent la forme *contraposée* de cette implication :

$$\text{Si la suite } (u_n) \text{ ne tend pas vers 0 alors la série } \sum_{n\geqslant m} u_n \text{ est } \textbf{divergente}$$

Attention la *réciproque* est fausse. Contre-exemple : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente et pourtant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Trop nombreux sont ceux qui font l'erreur de raisonnement de dire que la série converge lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3.2 Combinaisons linéaires de séries convergentes

Théorème

Soient $(u_n)_{n\geqslant m}$ et $(v_n)_{n\geqslant m}$ deux suites de réels, α et β deux réels.

Si les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant m} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant m} v_n$ sont convergentes alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant m} (\alpha u_n + \beta v_n)$ est convergente.

et alors : $\displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=m}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=m}^{+\infty} v_n$

Démonstration : *Voir la feuille_cours_1_bis.*

Exemples : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{3}{n^2} - 4 \times 2^{-n}\right)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3n}{3^n}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 2^{-n}$

Corollaire

Pour $\alpha \neq 0$,

$$\sum_{n\geqslant m} u_n \text{ converge si, et seulement si, } \sum_{n\geqslant m} \alpha u_n \text{ converge.}$$

En effet :

Exemples :

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3}{n}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4^{n-2}}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{-2}{n^2}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{n!}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nq^n$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 q^n$

3.3 Indice de départ.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels et n_1 et n_2 deux entiers naturels supérieurs à m,

La série $\sum\limits_{n\geqslant n_1} u_n$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geqslant n_2} u_n$ est convergente.

Démonstration : On suppose que $n_1 < n_2$

$$\forall n \geqslant n_2, \qquad \sum_{k=n_1}^{n} u_k \quad = \quad \underbrace{\sum_{k=n_1}^{n_2-1} u_k}_{\text{ne dépend pas de } n} \quad + \quad \sum_{k=n_2}^{n} u_k$$

donc les deux suites $\left(\sum\limits_{k=n_1}^{n} u_k\right)$ et $\left(\sum\limits_{k=n_2}^{n} u_k\right)$ convergent simultanément.

Remarque : en cas de convergence, toujours avec $n_1 < n_2$, on a

$$\sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n \quad = \quad \sum_{k=n_1}^{n_2-1} u_k \quad + \quad \sum_{n=n_2}^{+\infty} u_n$$

Exemples :

$\sum\limits_{n\geqslant 3} \dfrac{1}{n^2}$ converge $\qquad \sum\limits_{n\geqslant 3} \dfrac{1}{n}$ diverge $\qquad \sum\limits_{n\geqslant 4} \dfrac{1}{n!}$ converge et $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e - 1 - 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}$

Remarques :

- On dit aussi que les séries $\sum\limits_{n\geqslant n_1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_2} u_n$ ont même nature.
- La nature d'une série ne dépend pas des premiers termes.
- Quand on demande la nature de la série, il est inutile de donner le premier indice.
- On peut ne rien mettre sous la somme. " Déterminer la nature de $\sum u_n$ ".

3.4 Séries à termes généraux à support fini.

Proposition.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels,

Si il existe un rang N à partir duquel $u_n = 0$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.

$$\text{et alors :} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

En effet : Si (u_n) est nulle à partir de N alors pour tout $n \geqslant N$, $S_n = S_N$ donc (S_n) converge vers S_N.

Exemples : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{10}{n}$ existe et vaut $\sum\limits_{n=0}^{10} \dbinom{10}{n} = 2^{10} = 1024$

Phrase de rédaction : "La somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe car (u_n) est à support fini."

Lien avec les fonctions polynômiales réelles :

Une fonction P est polynomiale si il existe une suite (a_n) nulle à partir d'un certain rang telle que :

$$P : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

3.5 Séries à termes positifs.

Deux résultats à redémontrer dans une copie.

Proposition. *(Complément)*

Soit $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels,

Si (u_n) est à **termes positifs** ou nuls alors la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k\right)_{n\geqslant m}$ est croissante.

En effet :

Proposition. *(Complément)*

Soit $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels,

Si (u_n) est à **termes positifs** ou nuls alors on a l'équivalence suivante :

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant m} u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant m}$ est majorée.

et en cas de convergence on a : $\forall n \geqslant m,\quad \displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=m}^{+\infty} u_k$

En effet :

3.6 Deux théorèmes de convergence.

Théorème (*Théorème de convergence des séries par comparaison des termes généraux positifs ou nuls*)

Soient $(u_n)_{n\geqslant m}$ et $(v_n)_{n\geqslant m}$ deux suites de réels,

❶ Si $\forall n \geqslant m,\quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ est convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente

❷ Si $\forall n \geqslant m,\quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\sum u_n$ est divergente alors la série $\sum v_n$ est divergente

Attention (erreur courante) : Trop nombreux sont ceux qui passent à la somme sur l'encadrement $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Démonstration : *Voir la feuille_cours_1_bis.*

Remarque : Il suffit de faire une des deux démonstrations :

En effet, lorsque : $\forall n \geqslant N,\quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, les deux implications suivantes sont la contraposée l'une de l'autre :

❶ Si $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n$ CV et ❷ Si $\sum u_n$ DV alors $\sum v_n$ DV.

Corollaire

Soient $(u_n)_{n\geqslant m}$ et $(v_n)_{n\geqslant m}$ deux suites de réels,

Si $\forall n \geqslant m\quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ est convergente

alors la série $\sum u_n$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=m}^{+\infty} v_n$

En effet :

— —

Théorème (*Théorème de convergence des séries par équivalence des termes généraux positifs ou nuls*)

Soient $(u_n)_{n\geqslant m}$ et $(v_n)_{n\geqslant m}$ deux suites de réels,

❶ Si $u_n \sim v_n$ et si $\forall n \geqslant m,\ v_n \geqslant 0$ et si $\sum v_n$ est convergente,

alors la série $\sum u_n$ est convergente

❷ Si $u_n \sim v_n$ et si $\forall n \geqslant m,\ v_n \geqslant 0$ et si $\sum v_n$ est divergente,

alors la série $\sum u_n$ est divergente

Attention : Trop nombreux sont ceux qui oublient $v_n \geqslant 0$.

Démonstration : *Voir la feuille_cours_1_bis.*

Une autre version de ce théorème

Théorème

Soient $(u_n)_{n\geqslant m}$ et $(v_n)_{n\geqslant m}$ deux suites de nombres réels,

Si $u_n \sim v_n$ et si $\forall n \geqslant m,\ v_n \geqslant 0$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature signifie :

$\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_n$ converge.

3.7 Absolue convergence et convergence.

Théorème. *(L'absolue convergence entraine la convergence)*

Soit $(u_n)_{n\geqslant m}$ une suite de réels,

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente

alors elle est convergente et $\left|\sum_{n=m}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=m}^{+\infty} |u_n|$

Démonstration :

Attention la *réciproque* est fausse.

Contre-exemple : La série .... est convergente, mais pas absolument convergente.

3.8 Ordre de sommation.

Théorème.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente

et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ce résultat est admis et nous servira dans le chapitre "Probabilité".

Autrement dit :

- La valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes.

- Si la série est absolument convergente alors elle est commutativement convergente.

3.9 Séries télescopiques.

Proposition. *(Complément)*

Soit (a_n) une suite réelle quelconque, on note (u_n) la suite définie par $u_n = a_{n+1} - a_n$,

La série de terme général u_n converge si, et seulement si, la suite (a_n) est convergente.

et en cas de convergence : $\displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \; - \; a_m$

En pratique on le redémontre, car il y a plusieurs situations possibles : $u_n = a_{n-1} - a_n$, $u_n = a_n - a_{n+1}$ ...

En effet :