Fonctions équivalentes.

Dans ce paragraphe $\,\alpha$ et $\,\beta\,$ désignent : x_0 (un réel), x_0^+ , x_0^- , $-\infty\,$ ou $\,+\infty.$

1.1Définitions :

Définition pour les fonctions :

Dire que f et g sont équivalentes au voisinage de α signifie que :

il existe une fonction φ telle que : $\left\{ \begin{array}{l} f(x)=\varphi(x)\,g(x), \quad \text{au voisinage de }\alpha\\ \lim_{x\to\alpha}\varphi(x)=1 \end{array} \right.$

Plus simplement, lorsque g ne s'annule pas au voisinage épointé de α :

Dire que f et g sont équivalentes au voisinage de α signifie que : $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

On note : $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{\alpha}{\sim} g$

Remarque : on n'écrit jamais : $f \sim 0$

Transfert des propriétés de g à f. 1.2

Proposition: (Les propriétés qui passent de g à f lorsque f et g sont équivalentes).

Soit f et g deux fonctions équivalentes en α . $(f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x))$

- si $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \beta$ alors $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ si $g(x) \neq 0$ au voisinage de α alors $f(x) \neq 0$ au voisinage de α .
- si $q(x) \ge 0$ au voisinage de α alors $f(x) \ge 0$ au voisinage de α .
- si g(x) < 0 au voisinage de α alors f(x) < 0 au voisinage de α .

Attention : ne pas réduire la définition de $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$ à : "elles ont la même limite".

1.3 Relation d'équivalence.

Proposition:

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de α .

- $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} f(x)$ Si $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} f(x)$ Si $\begin{cases} f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} h(x) \end{cases}$ alors $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} h(x)$

1.4 Compatibilité avec le produit.

Propositions:

roduit:

• Si
$$\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x) \\ f_2(x) \sim g_2(x) \end{cases}$$
 alors $f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x)$

Quotient : On suppose que les fonctions f_2 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de α .

• Si
$$\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x) \\ f_2(x) \sim g_2(x) \end{cases}$$
 alors $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$

Elévation à une puissance constante : $(a \in \mathbb{R})$

• Si
$$f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$$
 alors $(f(x))^a \underset{x \to \alpha}{\sim} (g(x))^a$

Attention, on ne somme pas des équivalents.

Dans une somme on ne remplace jamais une fonction par une fonction équivalente.

Corollaire: • Si
$$f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$$
 alors $|f(x)| \underset{x \to \alpha}{\sim} |g(x)|$

1.5 Composée à droite.

Proposition:

Composée d'une suite et d'une fonction : $("x = u_n")$

• Si
$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x) \\ \lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha \end{cases}$$
 alors $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} g(u_n)$

Composée de deux fonctions : ("y = h(x)")

• Si
$$\begin{cases} f(y) \underset{y \to \alpha}{\sim} g(y) \\ \lim_{x \to \beta} h(x) = \alpha \end{cases}$$
 alors $f(h(x)) \underset{x \to \beta}{\sim} g(h(x))$

Equivalence et polynômes. 1.6

Proposition:

Si
$$P: x \longmapsto \sum_{k=p}^{n} a_k x^k$$
 avec $n \geqslant p$, $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$ alors:
$$P(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} a_n x^n \quad , \quad P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n x^n \quad , \quad P(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_p x^p$$

Equivalences et fonctions dérivables.

Proposition:

Si
$$f$$
 est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors $f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$

Equivalents usuels en 0: 1.8

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad \text{Pour } a \in \mathbb{R}^*, \qquad (1+x)^a - 1 \underset{0}{\sim} ax$$

Equivalences usuelles et composées.

Soit h une fonction définie au voisinage de α (un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$).

Si
$$\lim_{x \to \alpha} h(x) = 0$$
 alors

$$\sin(h(x)) \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad e^{h(x)} - 1 \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad \ln(1 + h(x)) \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad (1 + h(x))^a - 1 \underset{\alpha}{\sim} ah(x)$$

Développements limités

Définition, notation, unicité. 2.1

I est un intervalle non trivial tel que 0 est un élément de I ou 0 est une borne de I,

Définition:

Soit n un entier naturel et f une fonction de I dans \mathbb{R} ,

Dire que f admet un développement limité d'ordre n en 0 signifie qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots a_n$ et une fonction ε de I dans \mathbb{R} tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} \varepsilon = 0$$

Notation:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

 $f(x) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^n\right) \text{ signifie } \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} \qquad \text{ et } \qquad \text{se lit "} f(x) \text{ n\'egligeable } x^n\text{"}.$ Précicision:

Théorème (unicité)

Le polynôme associé au développement limité d'ordre n est unique.

Vocabulaire : Ce polynôme est appelé partie régulière du $DL_n(0)$.

Attention : Deux fonctions distinctes peuvent avoir la même partie régulière d'ordre n.

2.2Troncature.

Proposition:

Soit
$$N$$
 et n deux entiers naturels.
Si $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k + o(x^N)$ et $n \le N$ alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$

2.3 Lien avec les équivalents.

Théorème:

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ (attention $a \neq 0$),

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} a x^n + o(x^n)$$
 si, et seulement si, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a x^n$

2.4 Formule de Taylor-Young.

Théorème:

Si
$$f \in \mathcal{C}^n(I)$$
 alors f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et
$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \, x^k + o(x^n)$$

2.5 DL usuels en 0.

(A connaître)

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

2.6 Primitivation d'un DL.

Ici I est un intervalle non trivial contenant 0.

Théorème:

Soient
$$f: I \to \mathbb{R}$$
 dérivable sur I et $n \in \mathbb{N}$,
Si $f'(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ alors $f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$

2.7 Lien avec la régularité de f.

Théorème:

Soit
$$f: I \to \mathbb{R}$$
 avec $0 \in I$.

 f est dérivable en 0 si, et seulement si, $\exists (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2: \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + o(x)$ et on a alors : $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

Remarque:

f est dérivable en 0 **si, et seulement si,** f admet un développement limité d'ordre 1 en 0.