Fonctions équivalentes. Développements limités.

18 septembre 2024

Table des matières

1 Fonctions équivalentes.

Dans ce paragraphe α et β désignent : x_0 (un réel), x_0^+ , x_0^-, $-\infty$ ou $+\infty$.

1.1 Définitions :

Définition pour les fonctions :

Dire que f et g sont équivalentes au voisinage de α signifie que :

il existe une fonction φ telle que : $\begin{cases} f(x) = \varphi(x)\, g(x), & \text{au voisinage de } \alpha \\ \lim\limits_{x \to \alpha} \varphi(x) = 1 \end{cases}$

Plus simplement, lorsque g ne s'annule pas au voisinage épointé de α :

Dire que f et g sont équivalentes au voisinage de α signifie que : $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ \neq}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

On note : $\boldsymbol{f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)}$ **ou** $\boldsymbol{f \underset{\alpha}{\sim} g}$

Remarque : **on n'écrit jamais :** $\boldsymbol{f \underset{\alpha}{\sim} 0}$

1.2 Transfert des propriétés de g à f.

Proposition : (*Les propriétés qui passent de g à f lorsque f et g sont équivalentes*).

Soit f et g deux fonctions équivalentes en α. ($f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$)

- si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \beta$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$
- si $g(x) \neq 0$ au voisinage de α alors $f(x) \neq 0$ au voisinage de α.
- si $g(x) \geqslant 0$ au voisinage de α alors $f(x) \geqslant 0$ au voisinage de α.
- si $g(x) < 0$ au voisinage de α alors $f(x) < 0$ au voisinage de α.

Attention : ne pas réduire la définition de $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$ à : "elles ont la même limite".

1.3 Relation d'équivalence.

Proposition :

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de α.

- $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} f(x)$
- Si $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} f(x)$
- Si $\begin{cases} f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} h(x) \end{cases}$ alors $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} h(x)$

1.4 Compatibilité avec le produit.

Propositions :

Produit :

- Si $\begin{cases} f_1(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g_2(x) \end{cases}$ alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g_1(x)g_2(x)$

Quotient : *On suppose que les fonctions f_2 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de α.*

- Si $\begin{cases} f_1(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g_2(x) \end{cases}$ alors $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to\alpha}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$

Elévation à une puissance constante : $(a \in \mathbb{R})$

- Si $f(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g(x)$ alors $(f(x))^a \underset{x\to\alpha}{\sim} (g(x))^a$

Attention, on ne somme pas des équivalents.

Dans une somme on ne remplace jamais une fonction par une fonction équivalente.

Corollaire : • Si $f(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x\to\alpha}{\sim} |g(x)|$

1.5 Composée à droite.

Proposition :

Composée d'une suite et d'une fonction : ("$x = u_n$")

- Si $\begin{cases} f(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g(x) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha \end{cases}$ alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$

Composée de deux fonctions : ("$y = h(x)$")

- Si $\begin{cases} f(y) \underset{y\to\alpha}{\sim} g(y) \\ \lim\limits_{x\to\beta} h(x) = \alpha \end{cases}$ alors $f\left(h(x)\right) \underset{x\to\beta}{\sim} g\left(h(x)\right)$

1.6 Equivalence et polynômes.

Proposition :

Si $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k x^k$ avec $n \geqslant p$, $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$ alors :

$$P(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} a_n\, x^n \quad , \quad P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n\, x^n \quad , \quad P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p\, x^p$$

1.7 Equivalences et fonctions dérivables.

Proposition :

Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors $f(x) - f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$

1.8 Equivalents usuels en 0 :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad \text{Pour } a \in \mathbb{R}^*, \quad (1+x)^a - 1 \underset{0}{\sim} ax$$

Equivalences usuelles et composées.

Soit h une fonction définie au voisinage de α (un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$).

Si $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = 0}$ **alors**

$$\sin(h(x)) \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad e^{h(x)} - 1 \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad \ln(1+h(x)) \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad (1+h(x))^a - 1 \underset{\alpha}{\sim} ah(x)$$

2

Développements limités

2.1 Définition, notation, unicité.

I est un intervalle non trivial tel que 0 est un élément de I ou 0 est une borne de I,

Définition :

Soit n un entier naturel et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$,
Dire que f admet un développement limité d'ordre n en 0 signifie qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots a_n$ et une fonction ε de I dans $\mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$ et

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n$$

Notation :
Au lieu d'écrire à chaque fois :

il existe une fonction ε de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$ et

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n$$

on écrira :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)$$

Théorème (*unicité*)

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors il est unique.

2.2 Lien avec les équivalents.

Proposition :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ (attention $a \neq 0$),

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} a\, x^n + o(x^n) \quad \textbf{si, et seulement si,} \quad f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a x^n$$

Proposition :

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$, $(a_p, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-p}$ tel que $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

❶ $f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ **si, et seulement si,** $\left(f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right) \underset{x \to 0}{\sim} a_n x^n$

❷ **Si** $f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum\limits_{k=p}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ **alors** $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_p x^p$

2.3 Lien avec la régularité de f.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $0 \in I$.

f est dérivable en 0 **si, et seulement si,** $\exists (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + o(x)$

et on a alors : $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

Remarque pour retenir ce résultat :

f est dérivable en 0 **si, et seulement si,** f admet un développement limité d'ordre 1 en 0.

2.4 Formule de Taylor-Young.

Théorème :

Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

2.5 DL usuels en 0.

(A connaître)

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x \to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

2.6 Primitivation d'un DL.

Ici I est un intervalle non trivial contenant 0.

Théorème :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et $n \in \mathbb{N}$,

Si $\quad f'(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad$ alors $\quad f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$