# Table des matières

# 1 Fonctions équivalentes.

Dans ce paragraphe $\alpha$ et $\beta$ désignent : $x_0$ (un réel), $x_0^+$ , $x_0^-$, $-\infty$ ou $+\infty$.

## 1.1 Définitions :

**Définition pour les fonctions :**

Dire que $f$ et $g$ sont équivalentes au voisinage de $\alpha$ signifie que :

il existe une fonction $\varphi$ telle que : $\begin{cases} f(x) = \varphi(x)\, g(x), & \text{au voisinage de } \alpha \\ \lim\limits_{x \to \alpha} \varphi(x) = 1 \end{cases}$

Plus simplement, lorsque $g$ ne s'annule pas au voisinage épointé de $\alpha$ :

Dire que $f$ et $g$ sont équivalentes au voisinage de $\alpha$ signifie que : $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ \neq}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

On note : $\boldsymbol{f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)}$ **ou** $\boldsymbol{f \underset{\alpha}{\sim} g}$

Remarque : **on n'écrit jamais : $\boldsymbol{f \underset{\alpha}{\sim} 0}$**

## 1.2 Transfert des propriétés de $g$ à $f$.

**Proposition** : (*Les propriétés qui passent de $g$ à $f$ lorsque $f$ et $g$ sont équivalentes*).

Soit $f$ et $g$ deux fonctions équivalentes en $\alpha$. ($f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$)

- si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \beta$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$
- si $g(x) \neq 0$ au voisinage de $\alpha$ alors $f(x) \neq 0$ au voisinage de $\alpha$.
- si $g(x) \geqslant 0$ au voisinage de $\alpha$ alors $f(x) \geqslant 0$ au voisinage de $\alpha$.
- si $g(x) < 0$ au voisinage de $\alpha$ alors $f(x) < 0$ au voisinage de $\alpha$.

**Attention** : ne pas réduire la définition de $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$ à : "elles ont la même limite".

## 1.3 Relation d'équivalence.

**Proposition :**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $\alpha$.

- $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} f(x)$
- Si $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} f(x)$
- Si $\begin{cases} f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} h(x) \end{cases}$ alors $f(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} h(x)$

## 1.4 Compatibilité avec le produit.

**Propositions :**

**Produit :**

- Si $\begin{cases} f_1(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g_2(x) \end{cases}$ alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g_1(x)g_2(x)$

**Quotient :** *On suppose que les fonctions $f_2$ et $g_2$ ne s'annulent pas au voisinage de $\alpha$.*

- Si $\begin{cases} f_1(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g_2(x) \end{cases}$ alors $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to\alpha}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$

**Elévation à une puissance constante :** $(a \in \mathbb{R})$

- Si $f(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g(x)$ alors $(f(x))^a \underset{x\to\alpha}{\sim} (g(x))^a$

**Attention, on ne somme pas des équivalents.**

Dans une somme on ne remplace jamais une fonction par une fonction équivalente.

**Corollaire** : • Si $f(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x\to\alpha}{\sim} |g(x)|$

## 1.5 Composée à droite.

**Proposition :**

**Composée d'une suite et d'une fonction :** ("$x = u_n$")

- Si $\begin{cases} f(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} g(x) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha \end{cases}$ alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$

**Composée de deux fonctions :** ("$y = h(x)$")

- Si $\begin{cases} f(y) \underset{y\to\alpha}{\sim} g(y) \\ \lim\limits_{x\to\beta} h(x) = \alpha \end{cases}$ alors $f(h(x)) \underset{x\to\beta}{\sim} g(h(x))$

## 1.6 Equivalence et polynômes.

**Proposition :**

Si $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k x^k$ avec $n \geqslant p$ , $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$ alors :

$$P(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} a_n\, x^n \qquad , \qquad P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n\, x^n \qquad , \qquad P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p\, x^p$$

## 1.7 Equivalences et fonctions dérivables.

**Proposition :**

Si $f$ est dérivable en $x_0$ et si $f'(x_0) \neq 0$ alors $f(x) - f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$

## 1.8 Equivalents usuels en 0 :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad \text{Pour } a \in \mathbb{R}^*, \quad (1+x)^a - 1 \underset{0}{\sim} ax$$

**Equivalences usuelles et composées.**

Soit $h$ une fonction définie au voisinage de $\alpha$ (un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$).

**Si** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = 0}$ **alors**

$$\sin(h(x)) \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad e^{h(x)} - 1 \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad \ln(1+h(x)) \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad (1+h(x))^a - 1 \underset{\alpha}{\sim} ah(x)$$

# 2

# Développements limités

## 2.1 Définition, notation, unicité.

$I$ est un intervalle non trivial tel que 0 est un élément de $I$ ou 0 est une borne de $I$,

**Définition :**

> Soit $n$ un entier naturel et $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$,
> Dire que $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ en 0 signifie qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots a_n$ et une fonction $\varepsilon$ de $I$ dans $\mathbb{R}$ tels que
> $$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n \qquad \text{et} \qquad \lim_{0} \varepsilon = 0$$

**Notation :**

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)}$$

**Précicision** : $f(x) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^n\right)$ signifie $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^n}$ et se lit "$f(x)$ négligeable $x^n$".

**Théorème** (*unicité*)

> Le polynôme associé au développement limité d'ordre $n$ est unique.

**Vocabulaire** : Ce polynôme est appelé partie régulière du $DL_n(0)$.

**Attention :** Deux fonctions distinctes peuvent avoir la même partie régulière d'ordre $n$.

## 2.2 Troncature.

**Proposition :**

> Soit $N$ et $n$ deux entiers naturels.
> $$\text{Si} \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{N} a_k\, x^k + o(x^N) \quad \text{et} \quad n \leqslant N \quad \text{alors} \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o(x^n)$$

## 2.3 Lien avec les équivalents.

**Théorème :**

> Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ (attention $a \neq 0$),
> $$f(x) \underset{x \to 0}{=} a\, x^n + o(x^n) \quad \textbf{si, et seulement si,} \quad f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a x^n$$

## 2.4 Formule de Taylor-Young.

**Théorème :**

Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ alors $f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o(x^n)$$

## 2.5 DL usuels en $0$.

*(A connaître)*

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x \to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

## 2.6 Primitivation d'un DL.

Ici $I$ est un intervalle non trivial contenant 0.

**Théorème :**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I$ et $n \in \mathbb{N}$,

Si $\quad f'(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad$ alors $\quad f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$

## 2.7 Lien avec la régularité de $f$.

**Théorème :**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $0 \in I$.

$f$ est dérivable en 0 **si, et seulement si,** $\exists (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + o(x)$

et on a alors : $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

**Remarque :**

$f$ est dérivable en 0 **si, et seulement si,** $f$ admet un développement limité d'ordre 1 en 0.