Colles de mathématiques - Semaine 1 - du 23/09/24

La colle commencera par une ou deux questions de cours sur le modèle des questions données au verso de cette page. Les démonstrations du cours pourront être demandés.

- **Révisions : Nombres complexes et trigonométrie.**

  Forme algébrique d'un nombre complexe. Représentation graphique. Affixe d'un point ou d'un vecteur.
  Conjugué, module, arguments. Interprétation graphique.
  Ecriture exponentielle. Notation $e^{i\theta}$, propriétés. Formule d'Euler. Linéarisation.
  Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.
  Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations $z^2 = a$ où $a \in \mathbb{C}$.
  Propriétés de $\cos(\theta)$, de $\sin(\theta)$ et de $\tan(\theta)$. Périodicités et symétries.
  Formules de trigonométrie : $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
  Résolution d'équations trigonométriques simples. $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$, $\tan(x) = t$ et $a\cos(\varphi) + b\sin(\varphi) = c$
  Transformation de $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$.
  Notation arcsin et arccos. Fonction arctan.

- **Révisions sur les sommes.**

  Révisions sur les sommes.
  Changement d'indice (décalage, inversion). telescopage. Séparation indice pair et impair.
  Sommes usuelles. *(géométriques, arithmétiques,)*
  Propriété de linéarité. Inégalité triangulaire.
  (Pas encore les sommes doubles).

- **Autres révisions.**

  Coefficients binomiaux, définition, propriétés, triangle de Pascal.
  Formule du binôme. Sommes usuelles avec des $\binom{n}{k}$.

- **Séries numériques.**

  Notation. Série $\sum\limits_{n\geqslant m} u_n$, sommes partielles $\sum\limits_{k=m}^{n} u_k$ et en cas de convergence la somme $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} u_n$.
  Définition de : "La série $\sum u_n$ est convergente" et définition de "$\sum u_n$ est absolument convergente".

  Séries usuelles : $\sum \frac{1}{n}$ $\quad \sum \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum q^n$ $\quad \sum nq^{n-1}$ $\quad \sum n(n-1)q^{n-2}$ $\quad \sum \frac{x^n}{n!}$

  La nature des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ n'est pas au programme de BCPST.
  Valeur de la somme des séries géométriques, géométriques dérivées (d'ordre 1 ou 2), exponentielles.
  (démonstration pour les séries géométriques)
  Condition nécessaire de convergence : si $\sum u_n$ est convergente alors (u_n) converge vers 0. (*Démonstration*)

  Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge.
  Théorème de convergence des séries par comparaison des termes généraux positifs ou nuls. *(démonstration)*
  Théorème de convergence des séries par équivalence des termes généraux positifs ou nuls. *(démonstration)*
  Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente. *(démonstration)*
  Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est commutativement convergente. *(admis)*

  Le théorème des séries alternées n'est pas au programme.

- **Python.**

  Etude de suites. Calcul de sommes.
  Exercices demandant l'utilisation d'une boucle `while`.
  On peut travailler par exemple sur des listes d'entiers, des listes de booléens.
  Représentation graphique sans `numpy`. *(comprendre comment faire une subdivision d'un segment $[a, b]$)*

Exemples de questions de cours :

La colle commencera par un exercice simple d'application d'un des deux théorèmes de convergence.

La rédaction est rarement bien assimilée.

- Démonstration de la convergence de $\sum \dfrac{1}{n^2}$ ou de la divergence de $\sum \dfrac{1}{n}$.
- Convergence et somme d'une série géométrique *(Enoncé et démonstration)*
- Donner la somme d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 (ou 2) de raison $q \in]-1,1[$.
- Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, énoncer la définition de : La série $\sum u_n$ est convergente.
- Calcul de suites équivalentes simples, idem avec des fonctions. *(Pas de DL)*
- Calcul de sommes. *(pas de sommes doubles)*.
- Nature d'une série. Calcul de la somme d'une série convergente.
- Enoncé du théorème de convergence par comparaison des termes généraux positifs ou nuls.
- Enoncé du théorème de convergence par équivalence des termes généraux positifs ou nuls.
- Utilisation du théorème de convergence par comparaison des termes généraux positifs ou nuls.
- Utilisation du théorème de convergence par équivalence des termes généraux positifs ou nuls.
- Etude de la convergence absolue d'une série.
- Ecrire un programme python permettant de représenter les termes d'une suite.
- Ecrire un programme python permettant de tracer une courbe sans `numpy`.