Fonctions usuelles.

21 septembre 2024

Table des matières

1

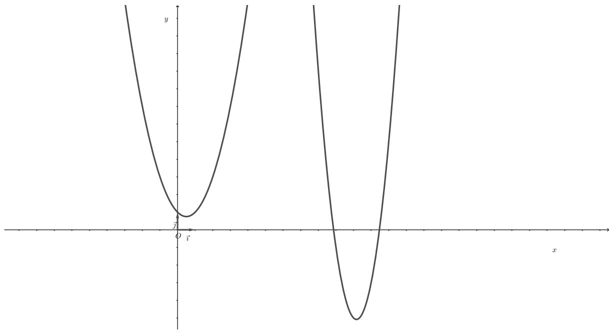
1.1 Polynômes du second degré.

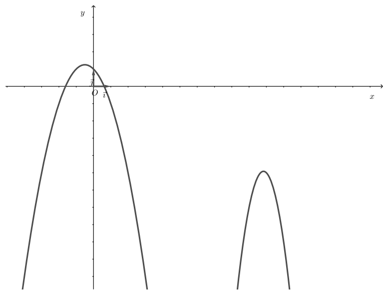
f est un polynome du second degré signifie qu'il existe des réels a, b, c avec $a \neq 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

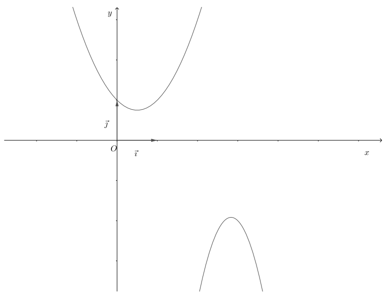
La représentation de ces fonctions est appelée **parabole**.

• Le signe de a donne l'allure de la parabole.

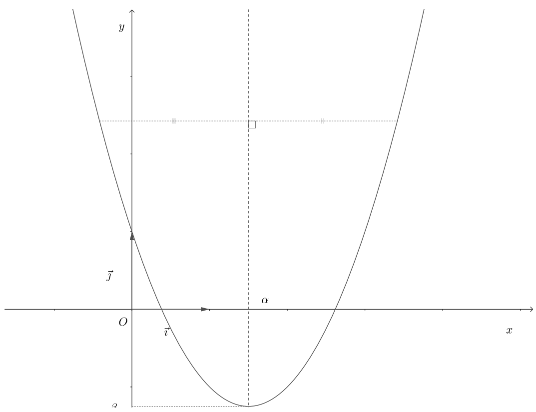




• Lorsque le polynome n'a pas de racines réelles.

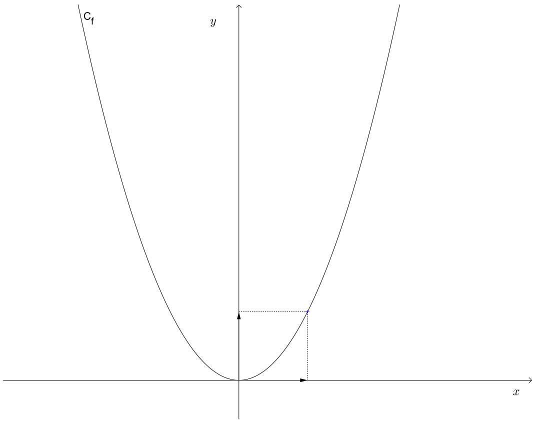


• La forme canonique donne le sommet et l'axe de symétrie.

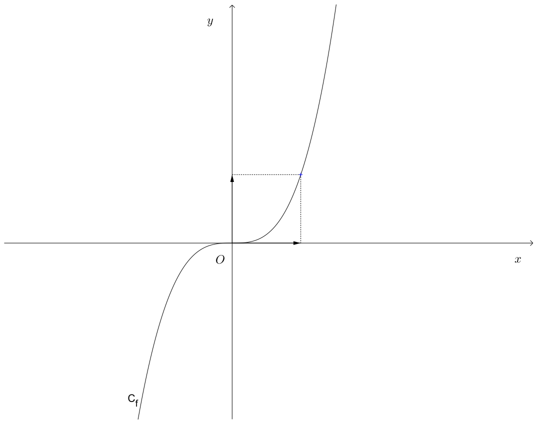


1.2 Fonction $x \longmapsto x^n$. $\quad n \in \mathbb{Z}^*$

• n strictement positif.
La fonction $f : x \longmapsto x^n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = n\, x^{n-1}$
La fonction est paire quand l'entier n est pair, la fonction est impaire quand l'entier n est impair.

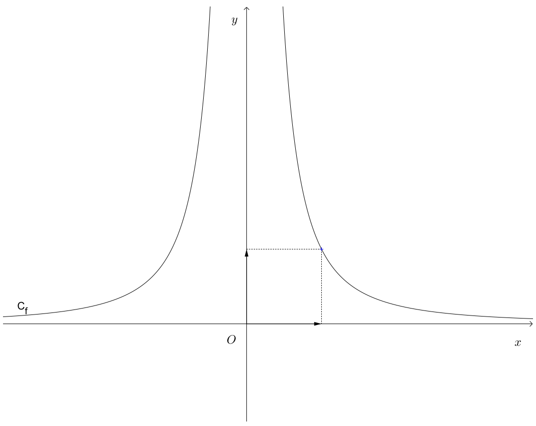


n pair

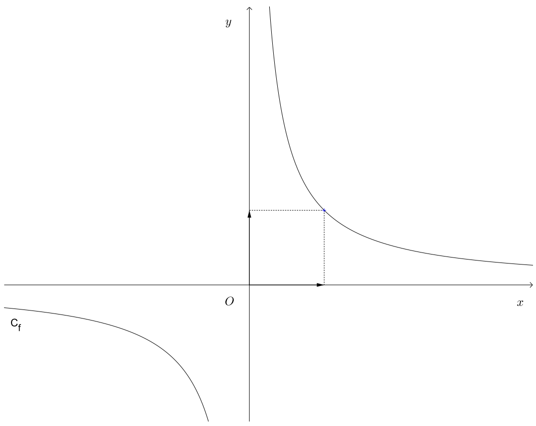


n impair ($n > 1$)

• n strictement négatif.
La fonction $f : x \longmapsto x^n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = n\, x^{n-1}$
La fonction est paire quand l'entier n est pair, la fonction est impaire quand l'entier n est impair.

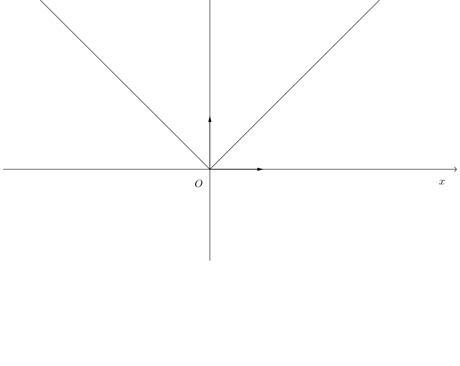


n pair



n impair

1.3 Fonction valeur absolue.



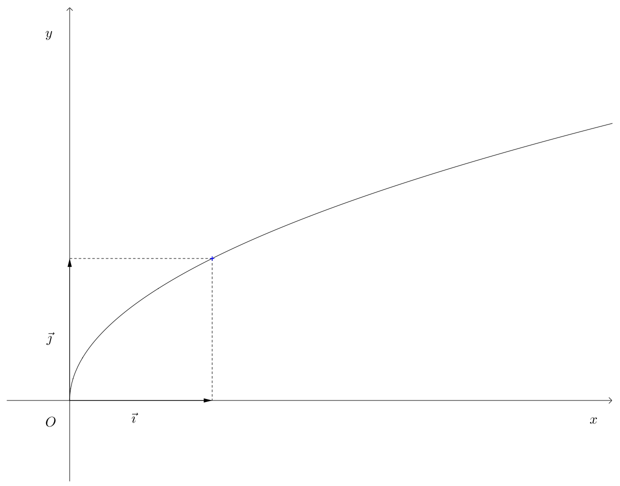
La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est paire.
Elle n'est pas dérivable en 0.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1.4 Fonction racine carrée.

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Elle n'est pas dérivable en 0, sa courbe au point d'abscisse 0 possède une tangente verticale.

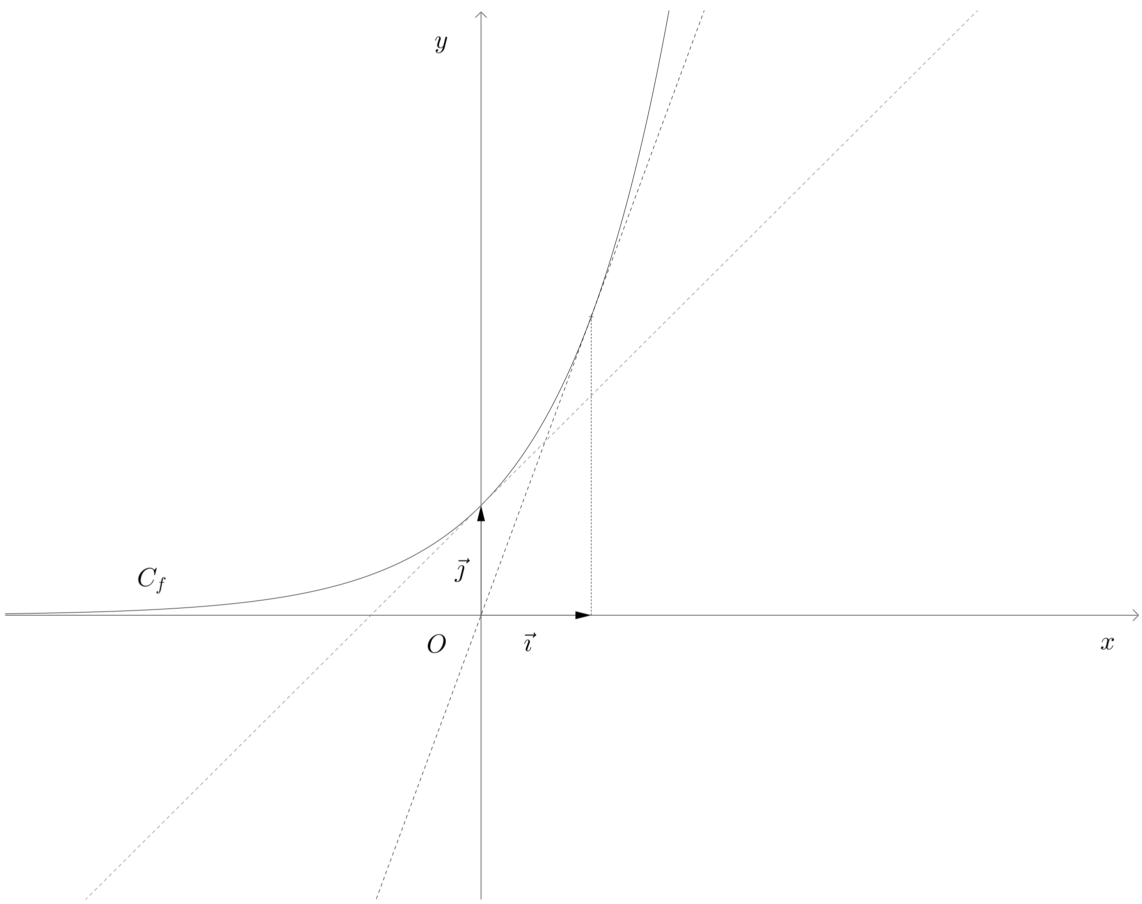
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.



1.5 Exponentielle.

Définition : la fonction exponentielle est la seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$



Remarque : La tangente au point de coordonnées $(1, e)$ passe par l'origine. (*Démonstration faite en classe*)

Cette fonction est à valeurs strictement positives :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x)$

• **Propriétés algébriques** :
Pour tout réel a et b :

$$e^0 = 1 \qquad e^{(a+b)} = e^a \times e^b \qquad e^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (e^a)^n = e^{na}$$

• **Nombre dérivé en** 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

• **Croissances comparées en** ∞ : ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• **Equations** :

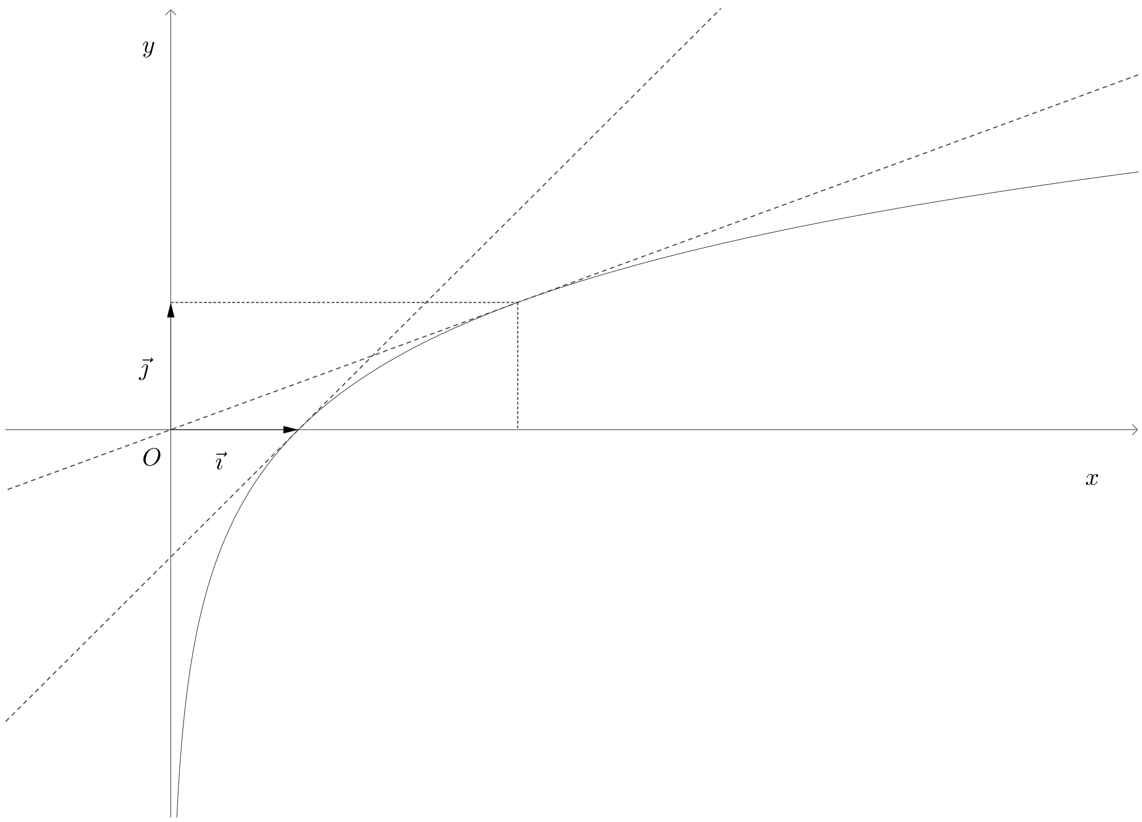
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad e^a = e^b \iff a = b$$

• **Inéquations** :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad e^a < e^b \iff a < b, \qquad e^a \leqslant e^b \iff a \leqslant b$$

1.6 Logarithme népérien.

Définition : Pour un réel strictement positif x, on appelle logarithme népérien de x, noté $\ln(x)$, l'unique réel t vérifiant : $\exp(t) = x$.



La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Propriétés algébriques :
Pour a et b deux réels strictement positifs,

$$\ln(1) = 0 \qquad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$$

• **Primitive** :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

C'est l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, s'annulant en 1.

• **Nombre dérivé en** 1 :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

• **Croissance comparée en** 0

$$\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$$

• **Croissances comparées en** $+\infty$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

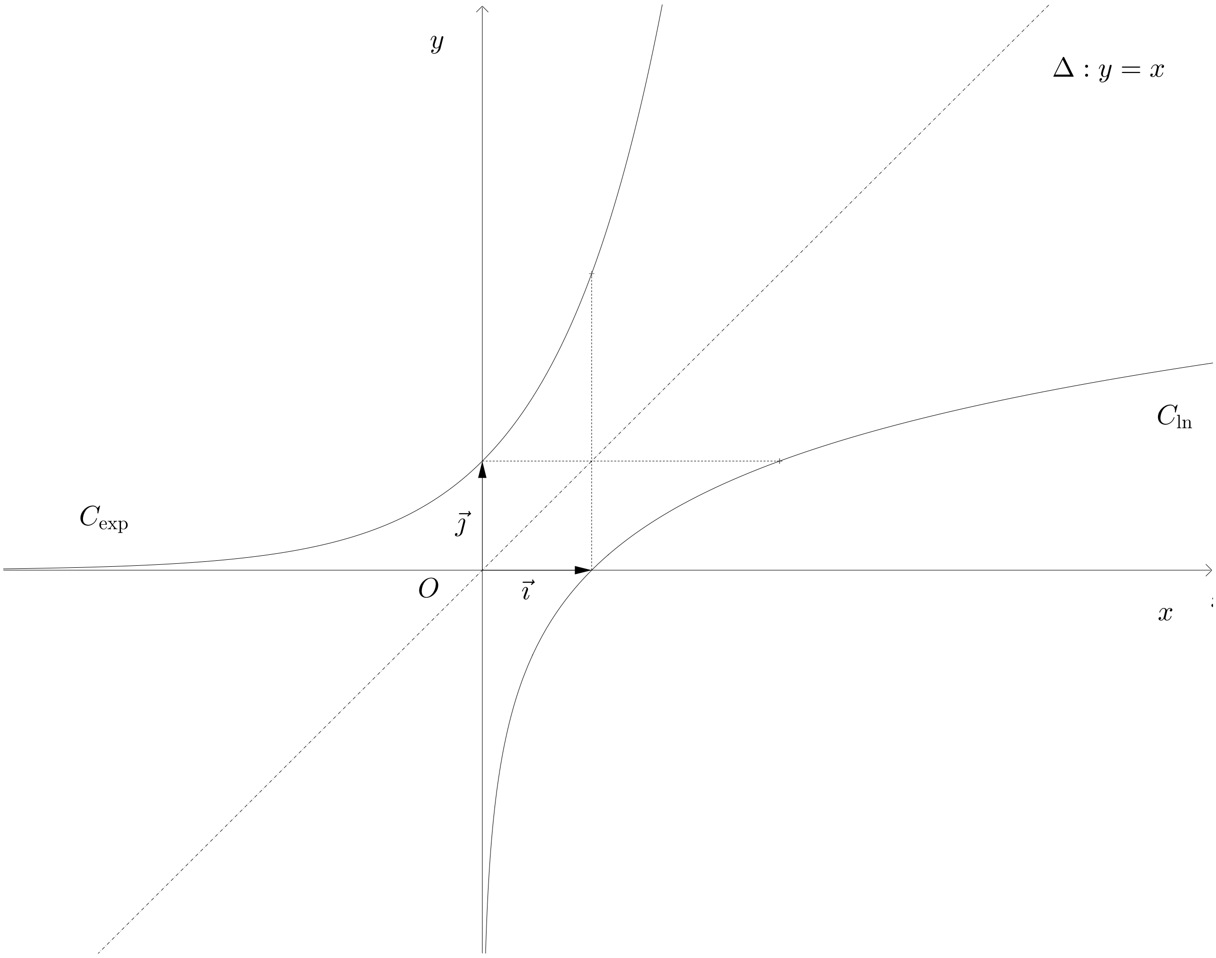
• **Equations :**

$$\forall (a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \quad \ln(a) = \ln(b) \iff a = b$$

• **Inéquations :**

$$\forall (a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \qquad \ln(a) < \ln(b) \iff a < b, \qquad \ln(a) \leqslant \ln(b) \iff a \leqslant b$$

1.7 Lien entre $\exp$ et $\ln$.



Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$y = \ln(x) \iff x = e^y$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, le réel $\ln(x)$ est par définition l'unique antécédent de x par exp donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \exp(\ln(x)) = x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $\ln(\exp(x))$ est par définition l'unique antécédent de $\exp(x)$ par exp donc :

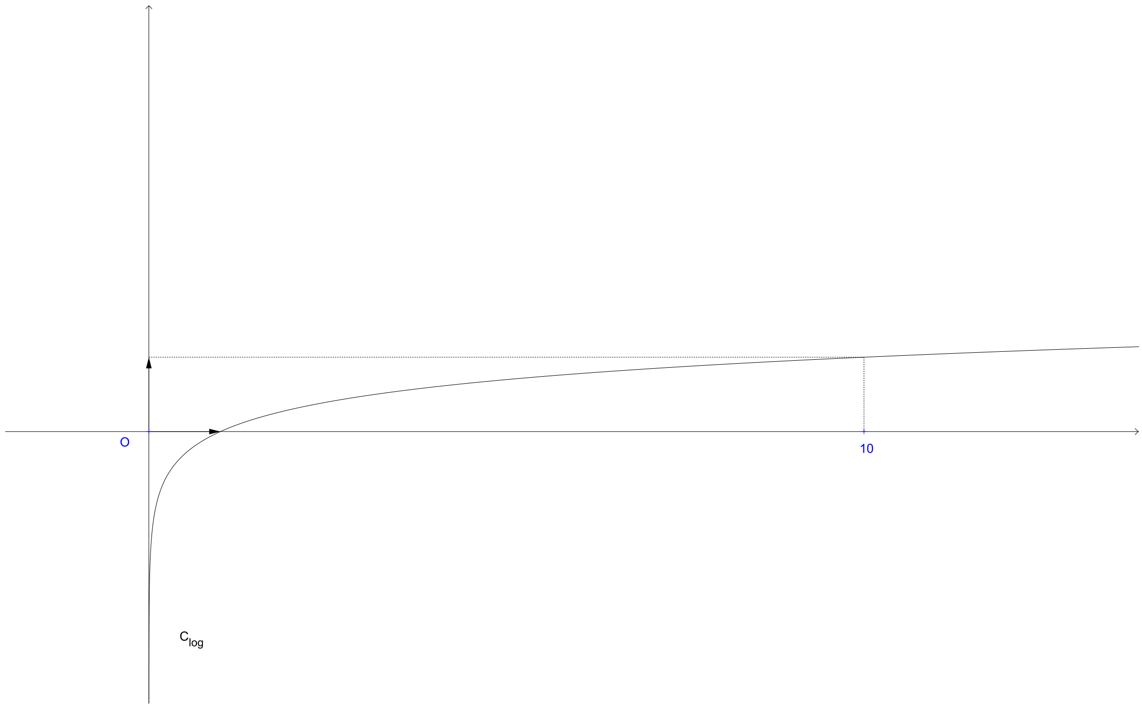
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \ln(\exp(x)) = x$$

1.8 Logarithme décimal.

Définition : Pour un réel strictement positif x, on appelle logarithme décimal de x, noté $\log(x)$, l'unique réel t vérifiant : $10^t = x$.

Il est simple de montrer :

$$\begin{array}{rccl} \log : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} \end{array}$$



La fonction $x \longmapsto \log(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \to 0} \log(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$$

La fonction log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log'(x) = \dfrac{1}{\ln(10)} \times \dfrac{1}{x}$

Propriétés algébriques :
Pour a et b deux réels strictement positifs,

$$\log(1) = 0 \qquad \log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log(a) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \log\left(a^n\right) = n\log(a)$$

• Puissance de 10.

$$\log(10) = 1 \qquad \log(10^n) = n \qquad \log\left(\frac{1}{10^n}\right) = -n$$

Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Equations :

$$\forall (a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \quad \log(a) = \log(b) \iff a = b$$

• Inéquations :

$$\forall (a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \qquad \log(a) < \log(b) \iff a < b, \qquad \log(a) \leqslant \log(b) \iff a \leqslant b$$

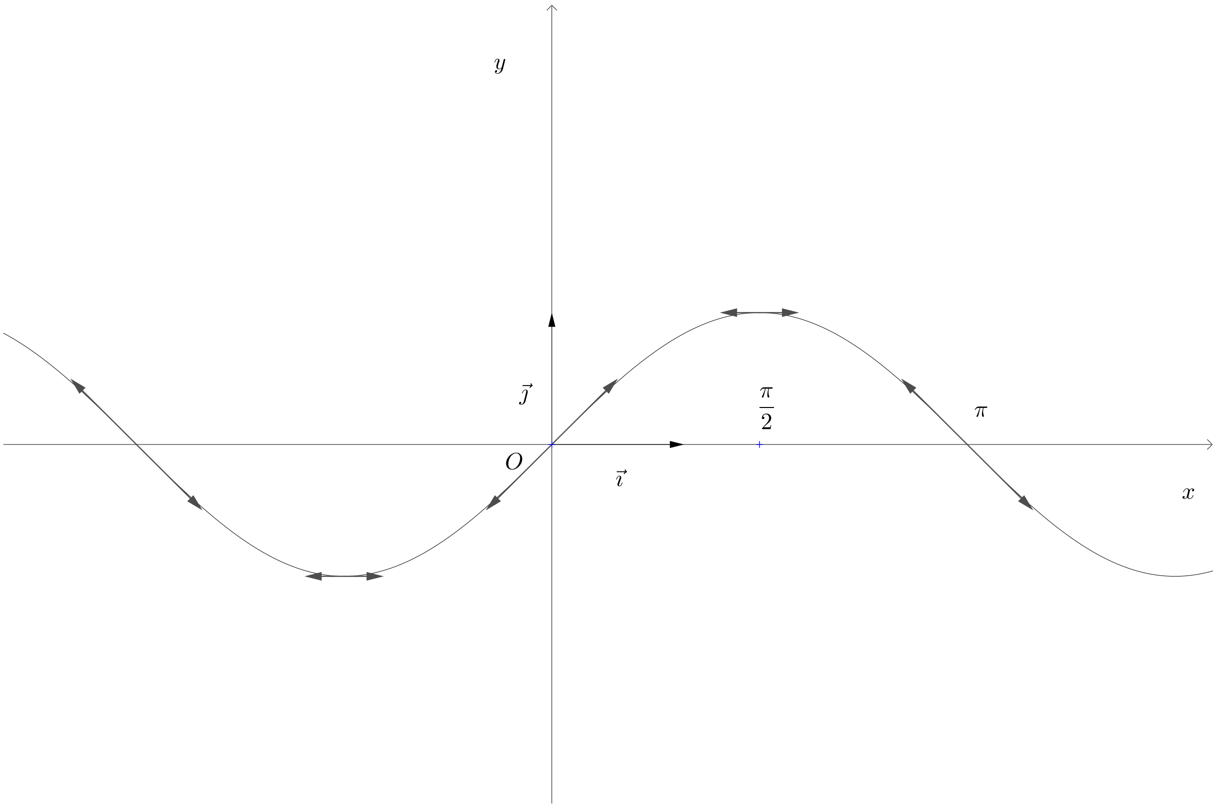
Lien avec la fonction $x \longmapsto 10^x$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in]0;\infty[, \quad y = 10^x \iff x = \log(y)$$

1.9 Fonctions cosinus et sinus.

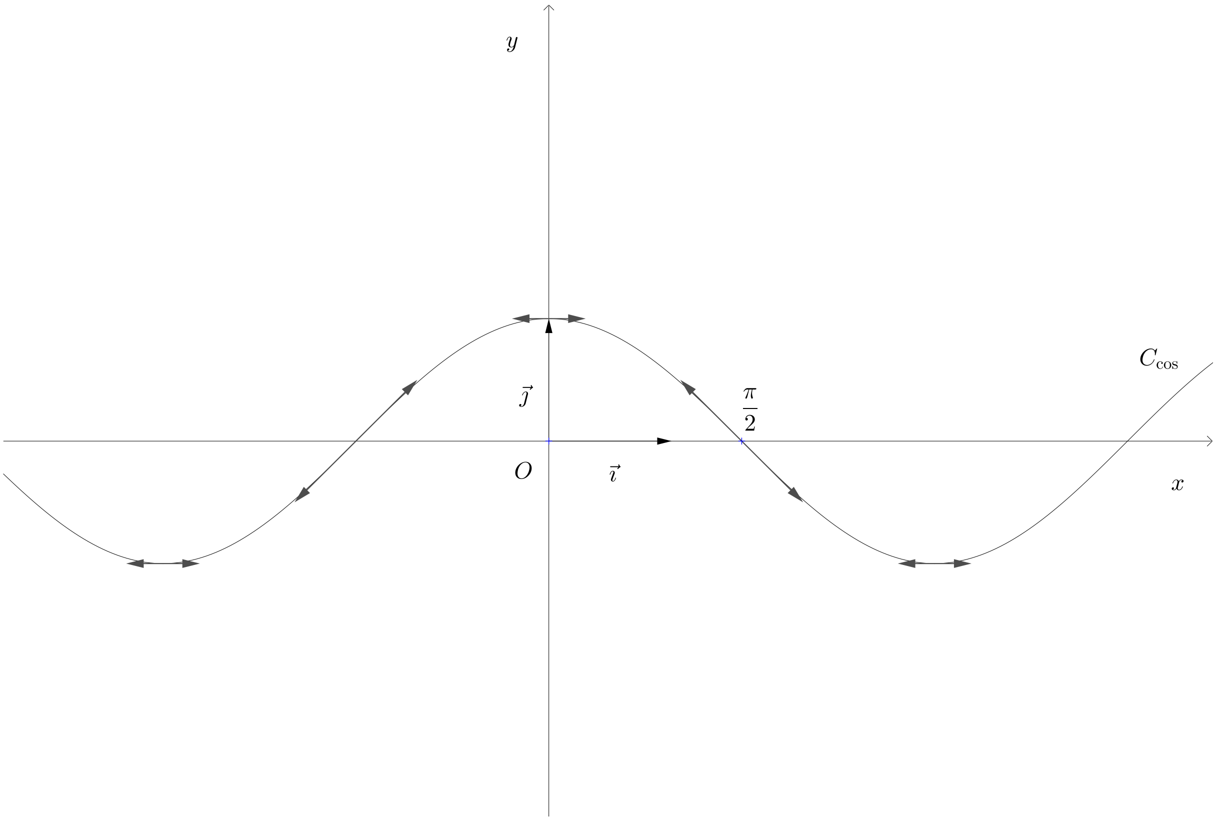
Fonction sinus.
La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire et 2π périodique.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x)$.



Fonction cosinus.
La fonction cosinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est paire et 2π périodique.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin(x)$.



1.10 Fonction tangente.

La fonction tangente est définie sur : $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ par :

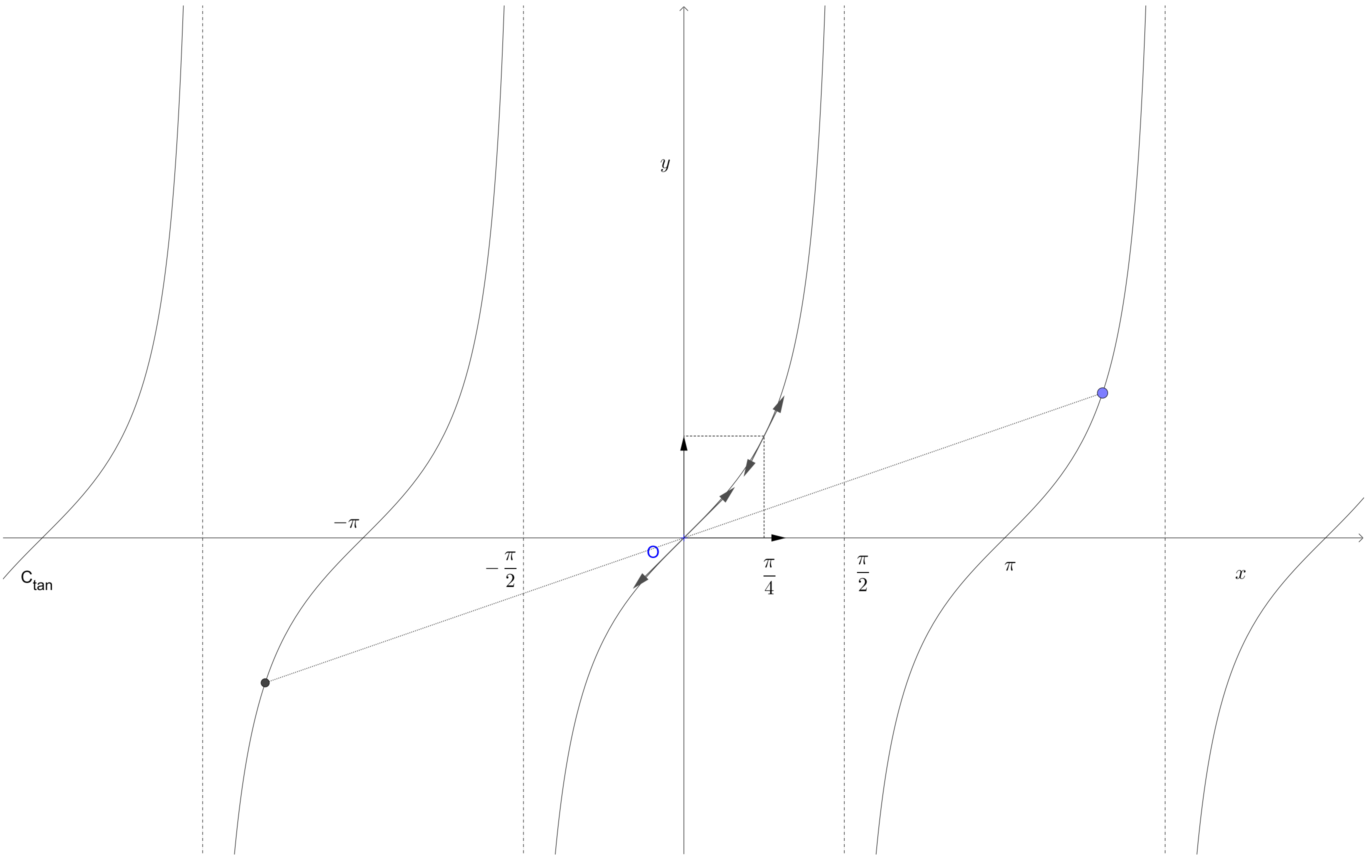
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Cette fonction est continue sur $D_{\tan}$.
Limites :

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ >}} \tan(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan(x) = +\infty$$

Elle est dérivable sur $D_{\tan}$ et $\quad \forall x \in D_{\tan}, \quad \tan'(x) = \tan^2(x) + 1 \quad$ ou $\quad \tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Elle impaire et π-périodique.



1.11 Fonction partie entière.

Définition :

Soit x un réel, il existe un et un seul entier relatif n vérifiant :

$$n \leqslant x < n+1$$

cet entier s'appelle **la partie entière** de x et se note $\lfloor x \rfloor$

Autrement dit : "La partie entière d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x".

Propriétés :

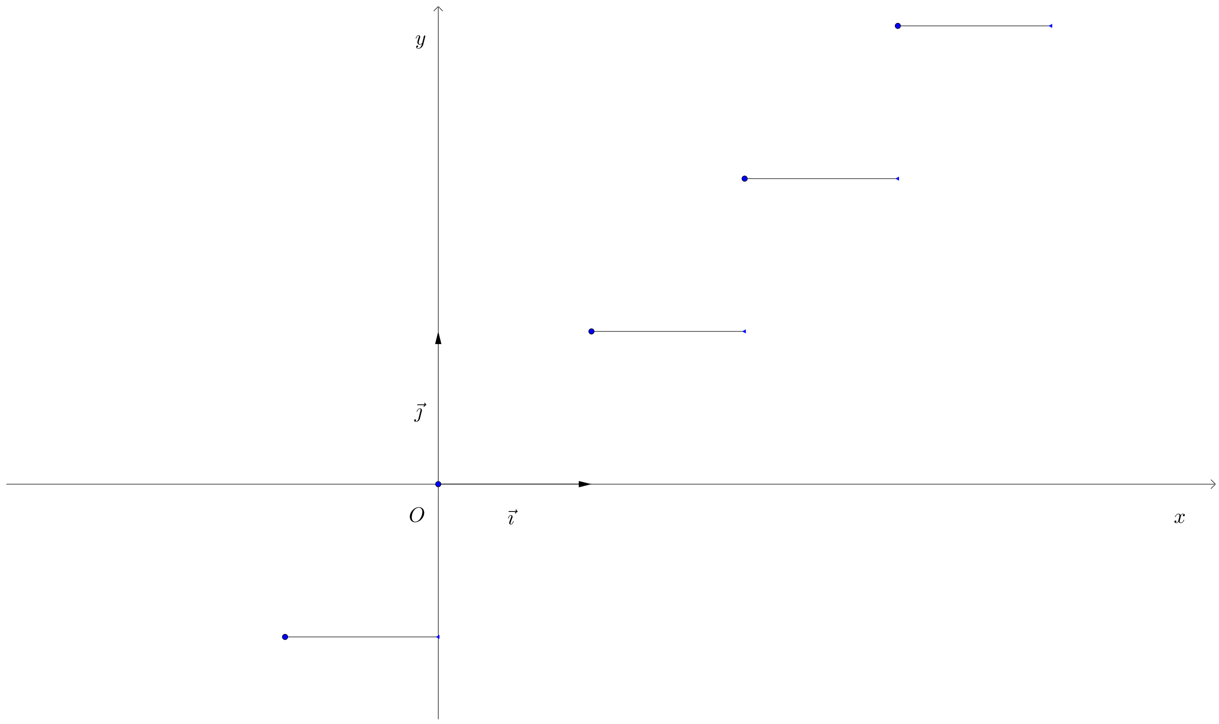
❶ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

❷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

❸ La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.



$x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$

$x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et n'est pas continue sur $\mathbb{Z}$.

$x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est constante sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

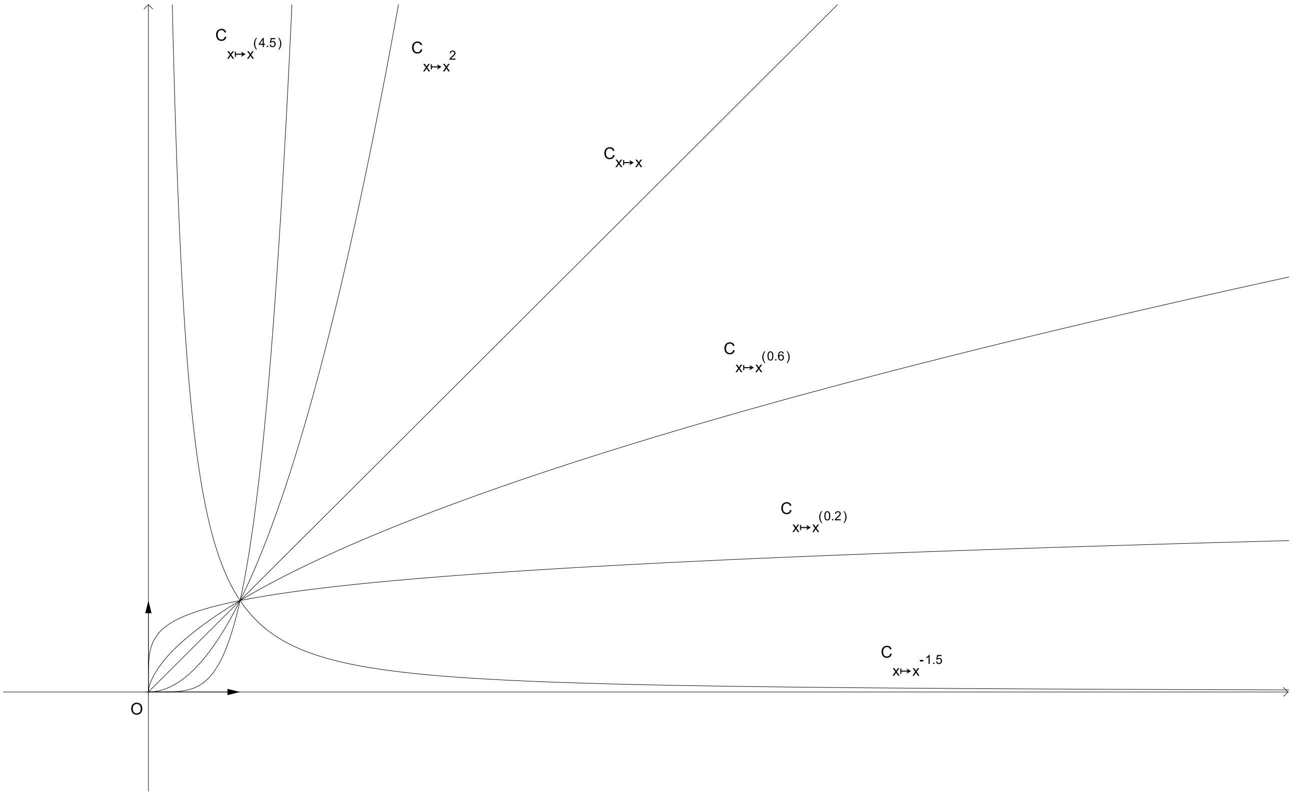
1.12 $\boldsymbol{x \longmapsto x^{\alpha}}$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

La fonction $x \longmapsto x^{\alpha}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est : $x \longmapsto \alpha\, x^{\alpha-1}$. (*Cela se démontre facilement*)

Sur la représentation suivante on peut distinguer les allures des courbes dans les trois cas suivants :

$$\alpha < 0 \qquad\qquad 0 < \alpha < 1 \qquad\qquad 1 < \alpha$$

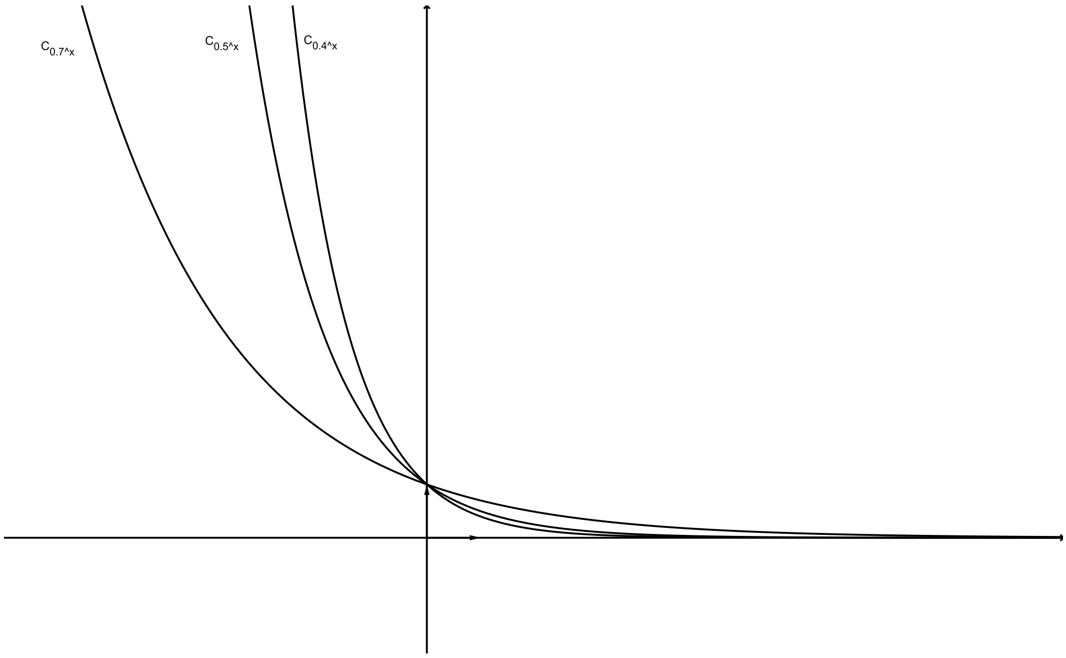


1.13 $\boldsymbol{x \longmapsto a^{x}}$($a$ un réel strictement positif)

La fonction $x \longmapsto a^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $x \longmapsto \ln(a)\, a^x$

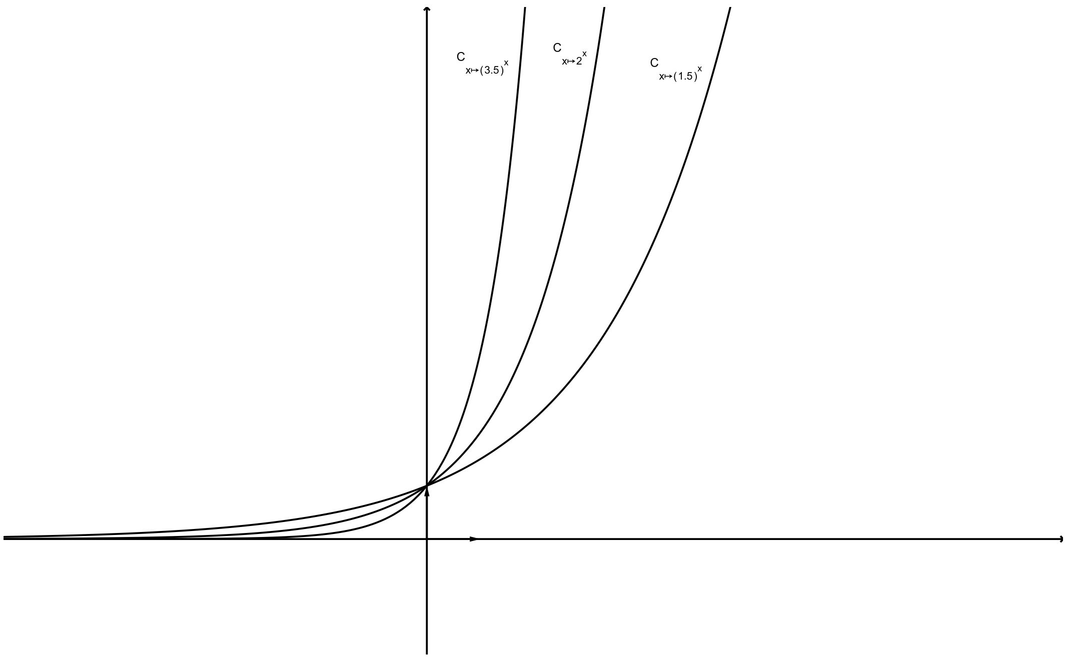
- Pour $0 < a < 1$,
  La fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$



• Pour $1 < a$,
La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

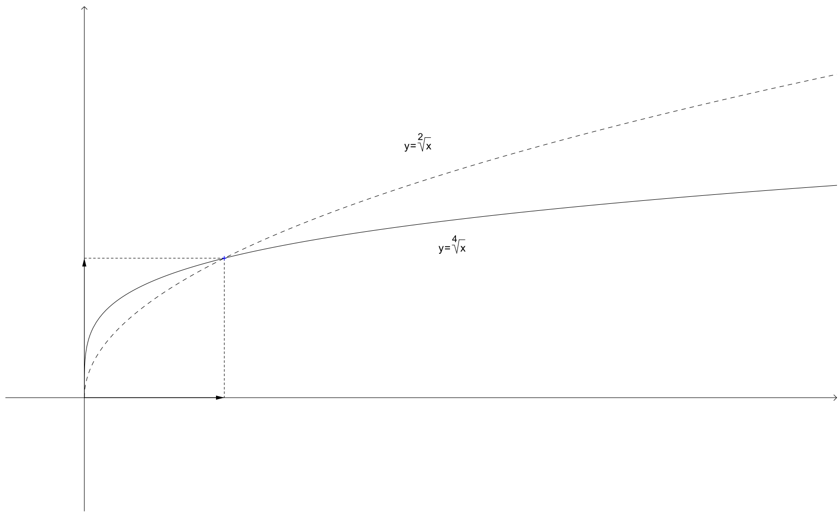


1.14 Fonction racine n-ième.

Premier cas : $n \in \mathbb{N}^*$ et $\boldsymbol{n}$ **pair.**

Définition : On appelle racine n-ième la réciproque de l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$.

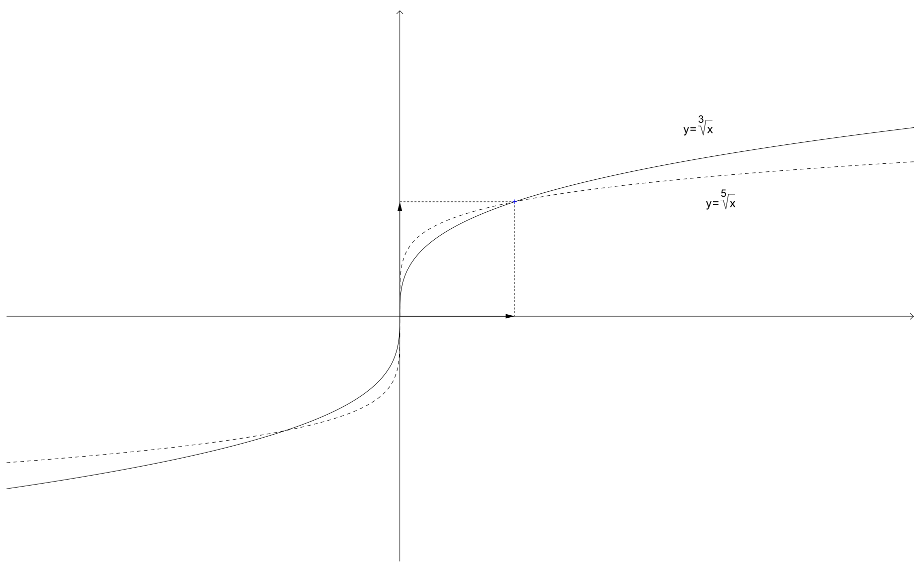
La fonction $f : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $[0; +\infty[$.
Elle n'est pas dérivable en 0. Sa courbe possède au point d'abscisse 0 une tangente verticale.
Elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$



Deuxième cas : $n \in \mathbb{N}$ et $\boldsymbol{n}$ **impair.**

Définition : On appelle racine n-ième la réciproque de l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$.

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est impaire.
Elle n'est pas dérivable en 0. Sa courbe possède au point d'abscisse 0 une tangente verticale.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$.



1.15 Fonction arctangente.

Définition : On appelle arctangente la réciproque de l'application $\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$.

Autrement dit :
arctan est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui associe à tout réel x, l'unique réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $\tan(\theta) = x$

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arctan(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$
- La fonction arctangente est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

- Elle est dérivable et sa dérivée est la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$
- Elle est strictement croissante et impaire.
- Pour $x \in \mathbb{R}, \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \qquad y = \arctan(x) \iff x = \tan(y)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

- Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$$\arctan(\tan(x)) = x$$