

Table des matières

1	Polynômes du second degré.	2
2	Fonction $x \mapsto x^n$. $n \in \mathbb{Z}^*$	3
3	Fonction valeur absolue.	4
4	Fonction racine carrée.	5
5	Exponentielle.	6
6	Logarithme népérien.	8
7	Lien entre exp et ln.	10
8	Logarithme décimal.	11
9	Fonctions cosinus et sinus.	13
10	Fonction tangente.	14
11	Fonction partie entière.	15
12	$x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	16
13	$x \mapsto a^x$ (a un réel strictement positif)	17
14	Fonction racine n -ième.	18
15	Fonction arctangente.	19

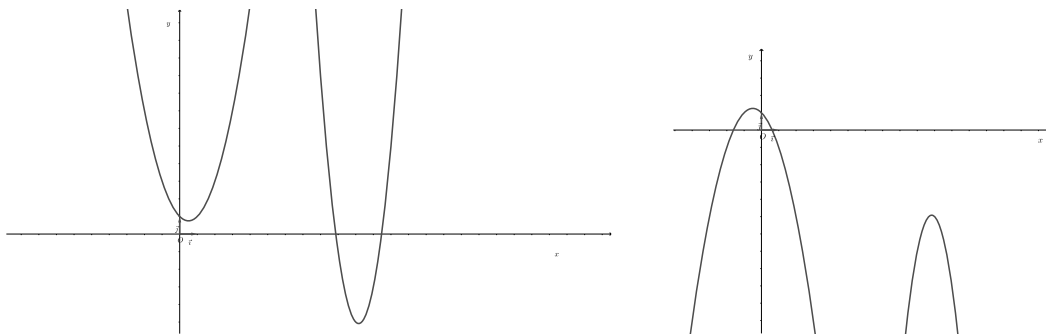
Polynômes du second degré.

f est un polynôme du second degré signifie qu'il existe des réels a, b, c avec $a \neq 0$ tels que :

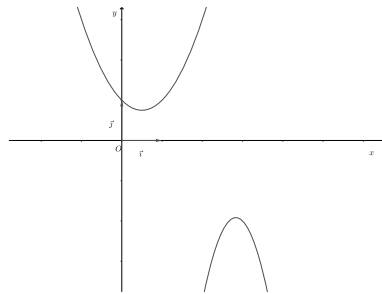
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

La représentation de ces fonctions est appelée **parabole**.

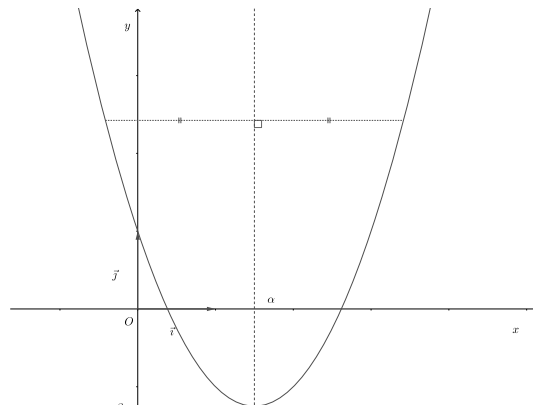
- Le signe de a donne l'allure de la parabole.



- Lorsque le polynôme n'a pas de racines réelles.



- La forme canonique donne le sommet et l'axe de symétrie.



Fonction $x \mapsto x^n$.

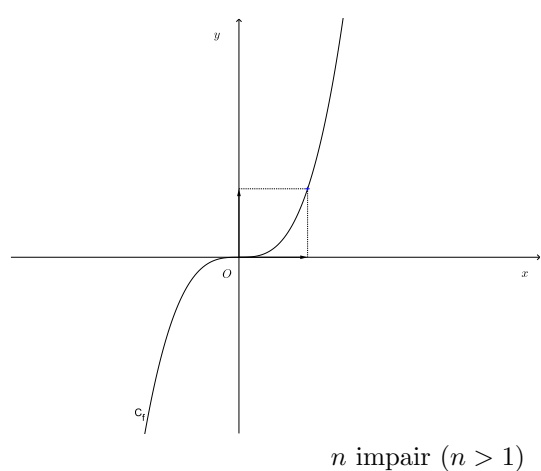
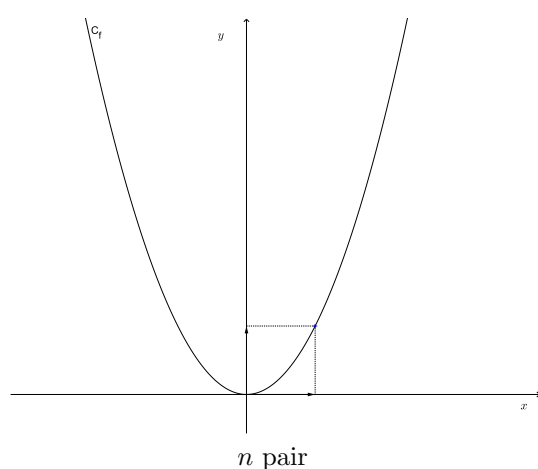
$n \in \mathbb{Z}^*$

- n strictement positif.

La fonction $f : x \mapsto x^n$ est définie et continue sur \mathbb{R} .

Elle est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = n x^{n-1}$

La fonction est paire quand l'entier n est pair, la fonction est impaire quand l'entier n est impair.

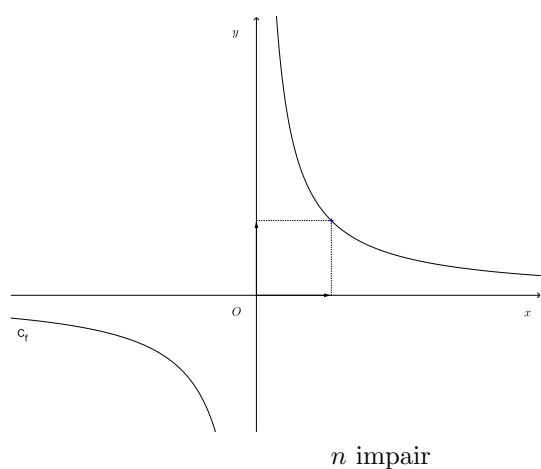
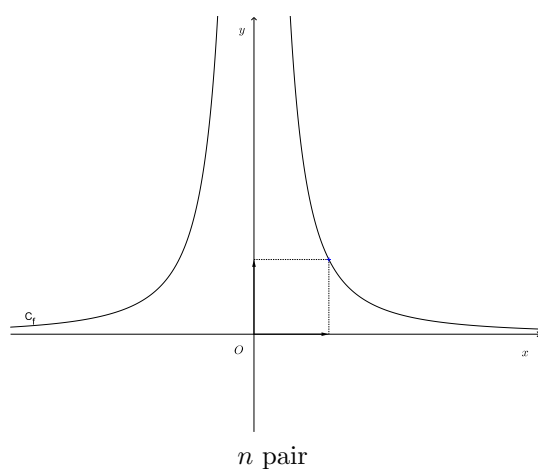


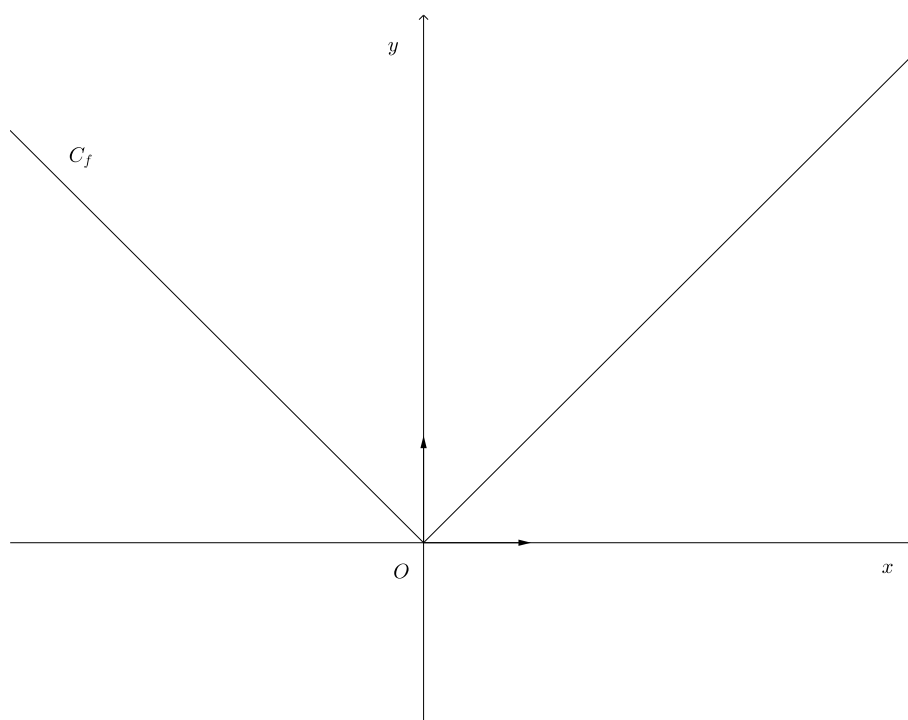
- n strictement négatif.

La fonction $f : x \mapsto x^n$ est définie et continue sur \mathbb{R}^* .

Elle est dérivable sur \mathbb{R}^* et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = n x^{n-1}$

La fonction est paire quand l'entier n est pair, la fonction est impaire quand l'entier n est impair.



Fonction valeur absolue.

La fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur \mathbb{R} .
 $x \mapsto |x|$

Elle est paire.

Elle n'est pas dérivable en 0.

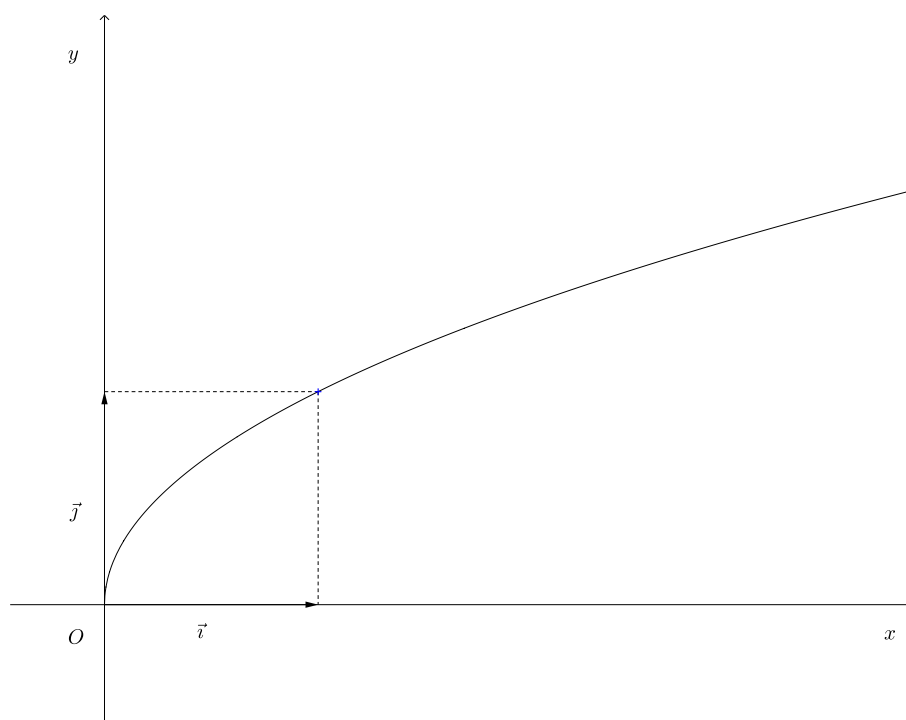
Elle est dérivable sur \mathbb{R}^* .

Fonction racine carrée.

La fonction $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
 $x \mapsto \sqrt{x}$

Elle n'est pas dérivable en 0, sa courbe au point d'abscisse 0 possède une tangente verticale.

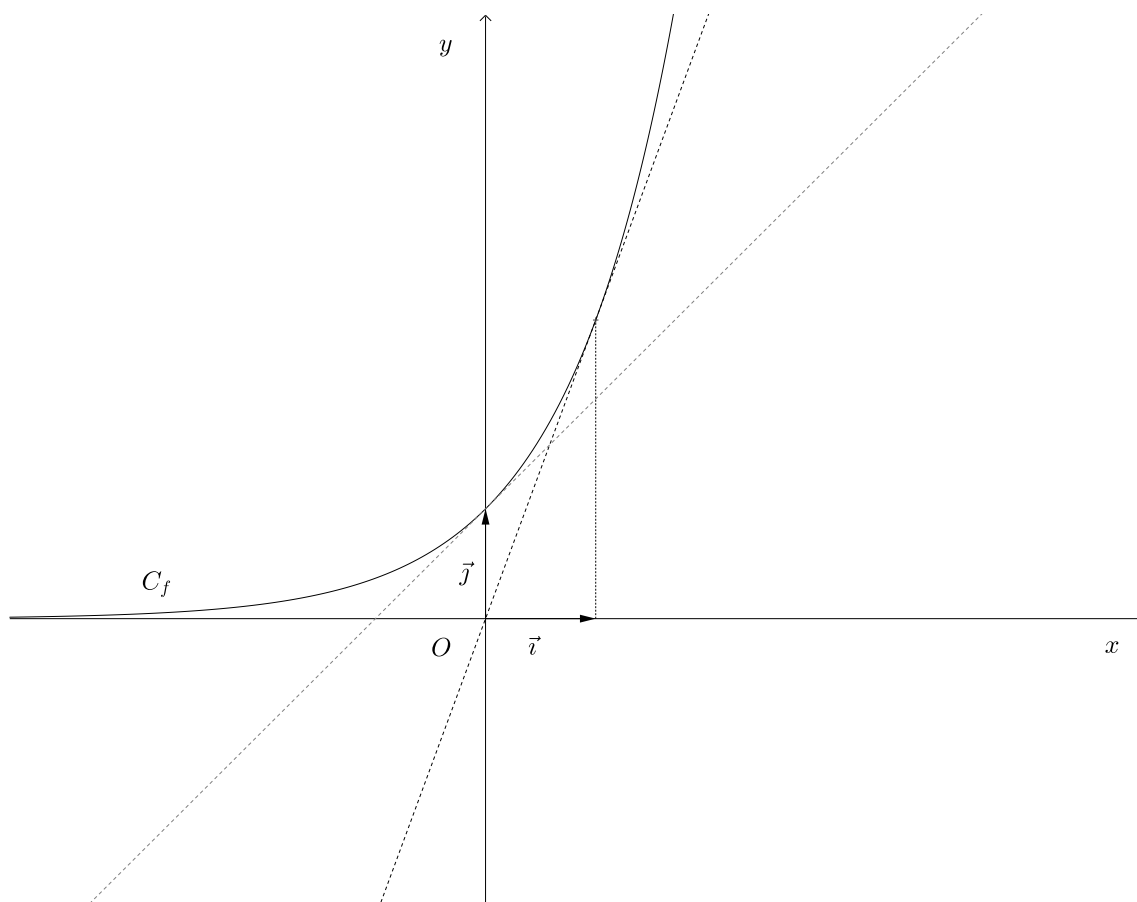
Elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.



Exponentielle.

Définition : la fonction exponentielle est la seule fonction f dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$



Remarque : La tangente au point de coordonnées $(1, e)$ passe par l'origine. (*Démonstration faite en classe*)

Cette fonction est à valeurs strictement positives :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$$

Cette fonction est continue sur \mathbb{R} .

Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Elle est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x)$

• **Propriétés algébriques :**

Pour tout réel a et b :

$$e^0 = 1 \quad e^{(a+b)} = e^a \times e^b \quad e^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (e^a)^n = e^{na}$$

• **Nombre dérivé en 0 :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

• **Croissances comparées en ∞ :** ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

Cette fonction est strictement croissante sur \mathbb{R} .

• **Equations :**

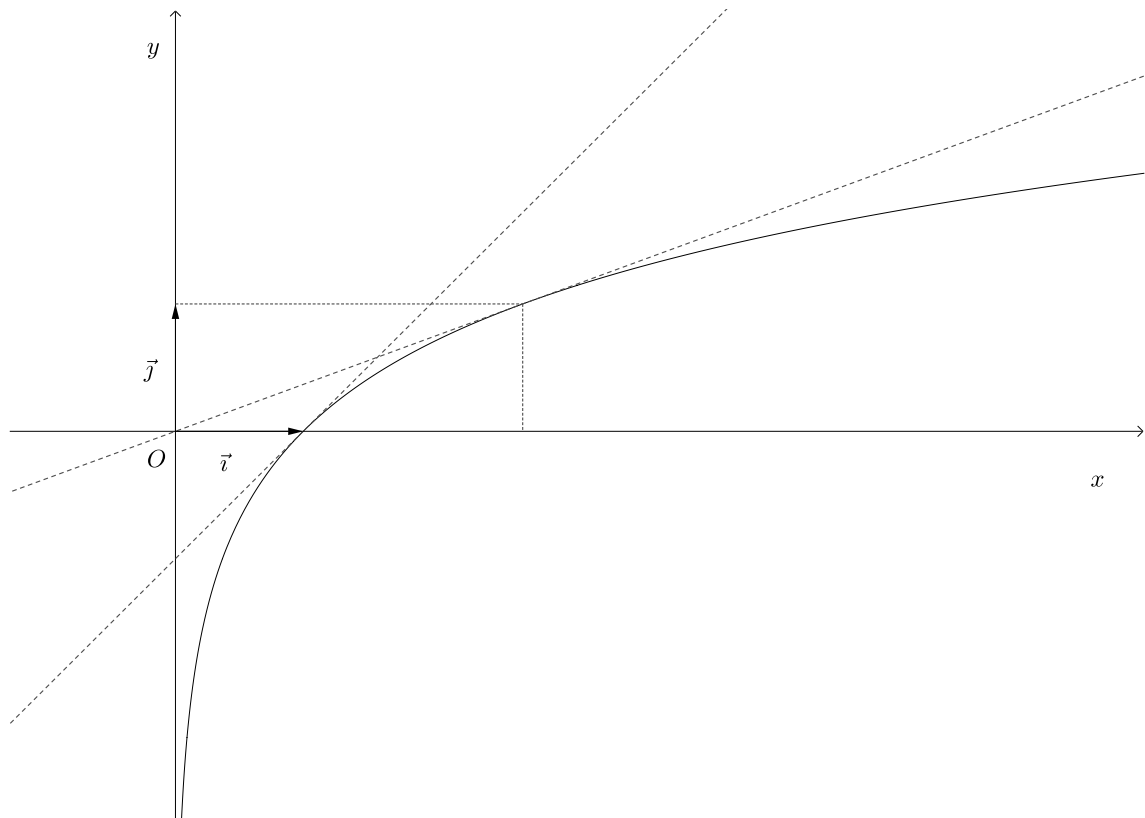
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad e^a = e^b \iff a = b$$

• **Inéquations :**

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad e^a < e^b \iff a < b, \quad e^a \leq e^b \iff a \leq b$$

Logarithme népérien.

Définition : Pour un réel strictement positif x , on appelle logarithme népérien de x , noté $\ln(x)$, l'unique réel t vérifiant : $\exp(t) = x$.



La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .

Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

La fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Propriétés algébriques :

Pour a et b deux réels strictement positifs,

$$\ln(1) = 0 \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n \ln(a)$$

• Primitive :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

C'est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* , s'annulant en 1.

- **Nombre dérivé en 1 :**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{ou encore} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

- **Croissance comparée en 0**

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

- **Croissances comparées en $+\infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Cette fonction est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

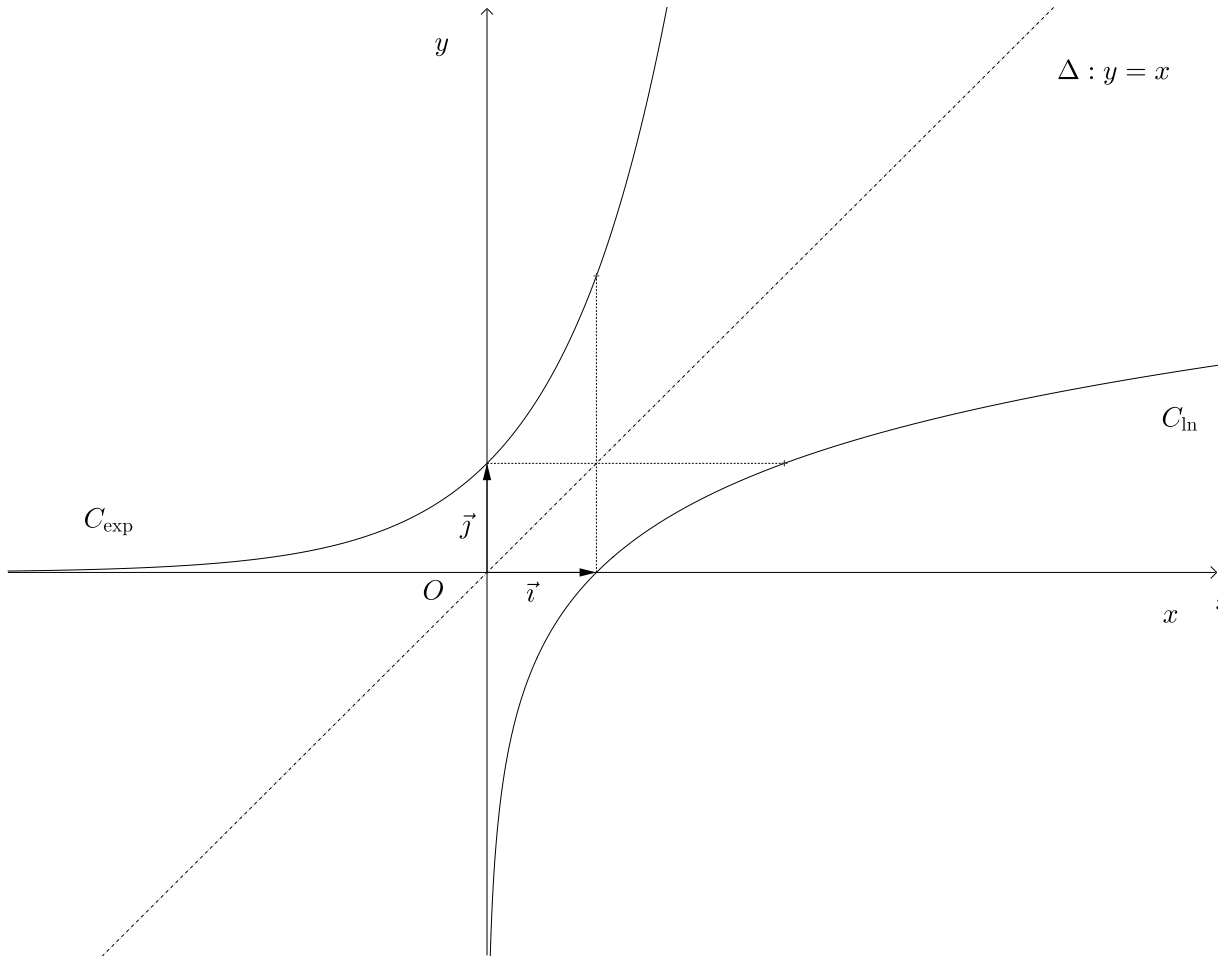
- **Equations :**

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \ln(a) = \ln(b) \iff a = b$$

- **Inéquations :**

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \ln(a) < \ln(b) \iff a < b, \quad \ln(a) \leq \ln(b) \iff a \leq b$$

Lien entre exp et ln.



Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$y = \ln(x) \iff x = e^y$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, le réel $\ln(x)$ est par définition l'unique antécédent de x par exp donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp(\ln(x)) = x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $\ln(\exp(x))$ est par définition l'unique antécédent de $\exp(x)$ par exp donc :

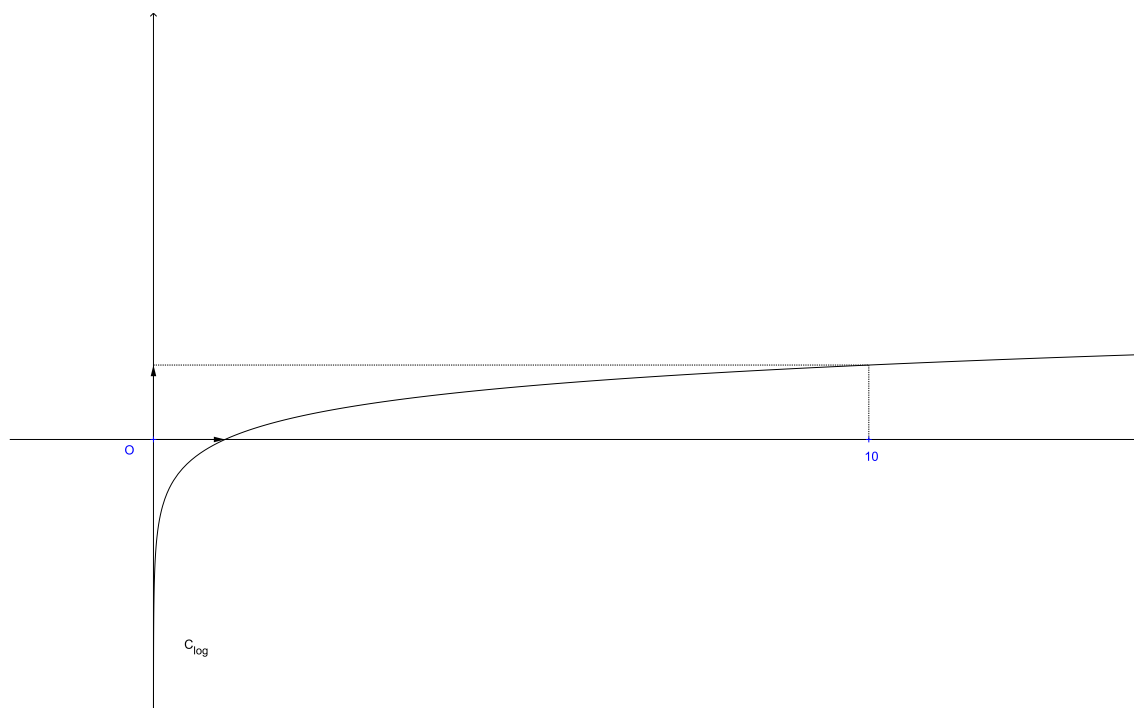
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(x)) = x$$

Logarithme décimal.

Définition : Pour un réel strictement positif x , on appelle logarithme décimal de x , noté $\log(x)$, l'unique réel t vérifiant : $10^t = x$.

Il est simple de montrer :

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \end{aligned}$$



La fonction $x \mapsto \log(x)$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .
Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

La fonction \log est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\log'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \times \frac{1}{x}$

Propriétés algébriques :

Pour a et b deux réels strictement positifs,

$$\log(1) = 0 \qquad \log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \log(a) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \log(a^n) = n \log(a)$$

- Puissance de 10.

$$\log(10) = 1 \qquad \log(10^n) = n \qquad \log\left(\frac{1}{10^n}\right) = -n$$

Cette fonction est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

- Equations :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \log(a) = \log(b) \iff a = b$$

- Inéquations :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \log(a) < \log(b) \iff a < b, \qquad \log(a) \leq \log(b) \iff a \leq b$$

Lien avec la fonction $x \mapsto 10^x$:

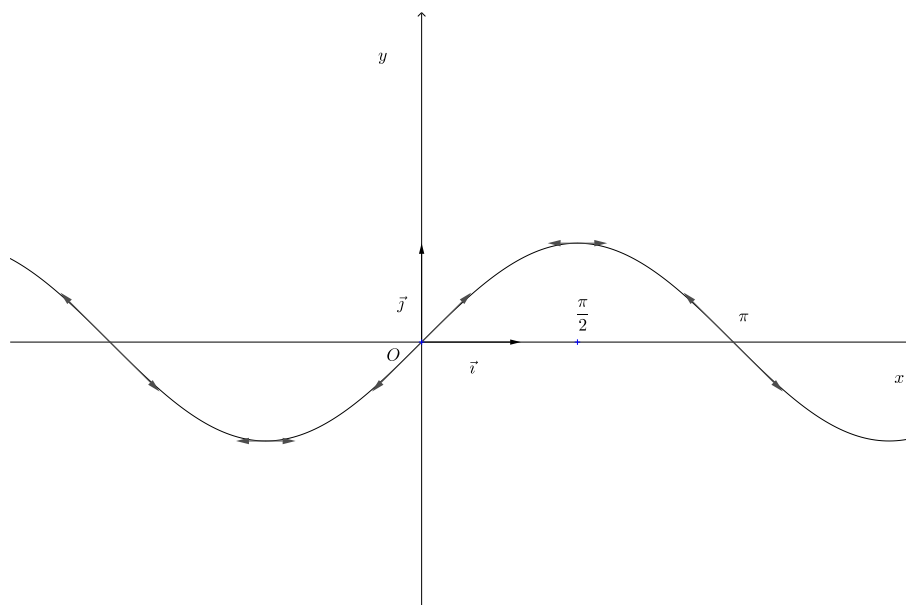
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0; \infty[, \quad y = 10^x \iff x = \log(y)$$

Fonctions cosinus et sinus.

Fonction sinus.

La fonction sinus est définie et continue sur \mathbb{R} . Elle est impaire et 2π périodique.

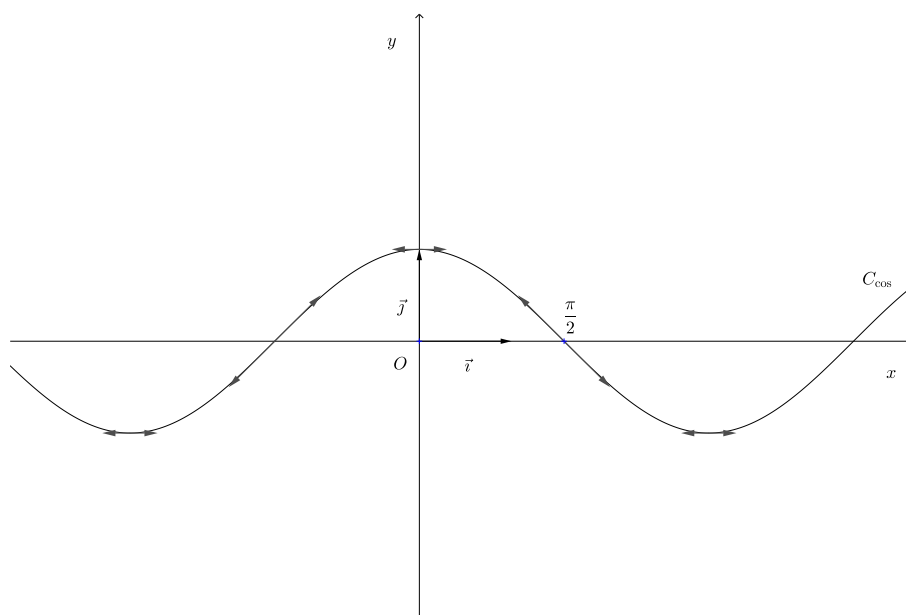
Elle est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$.



Fonction cosinus.

La fonction cosinus est définie et continue sur \mathbb{R} . Elle est paire et 2π périodique.

Elle est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.



Fonction tangente.

La fonction tangente est définie sur : $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

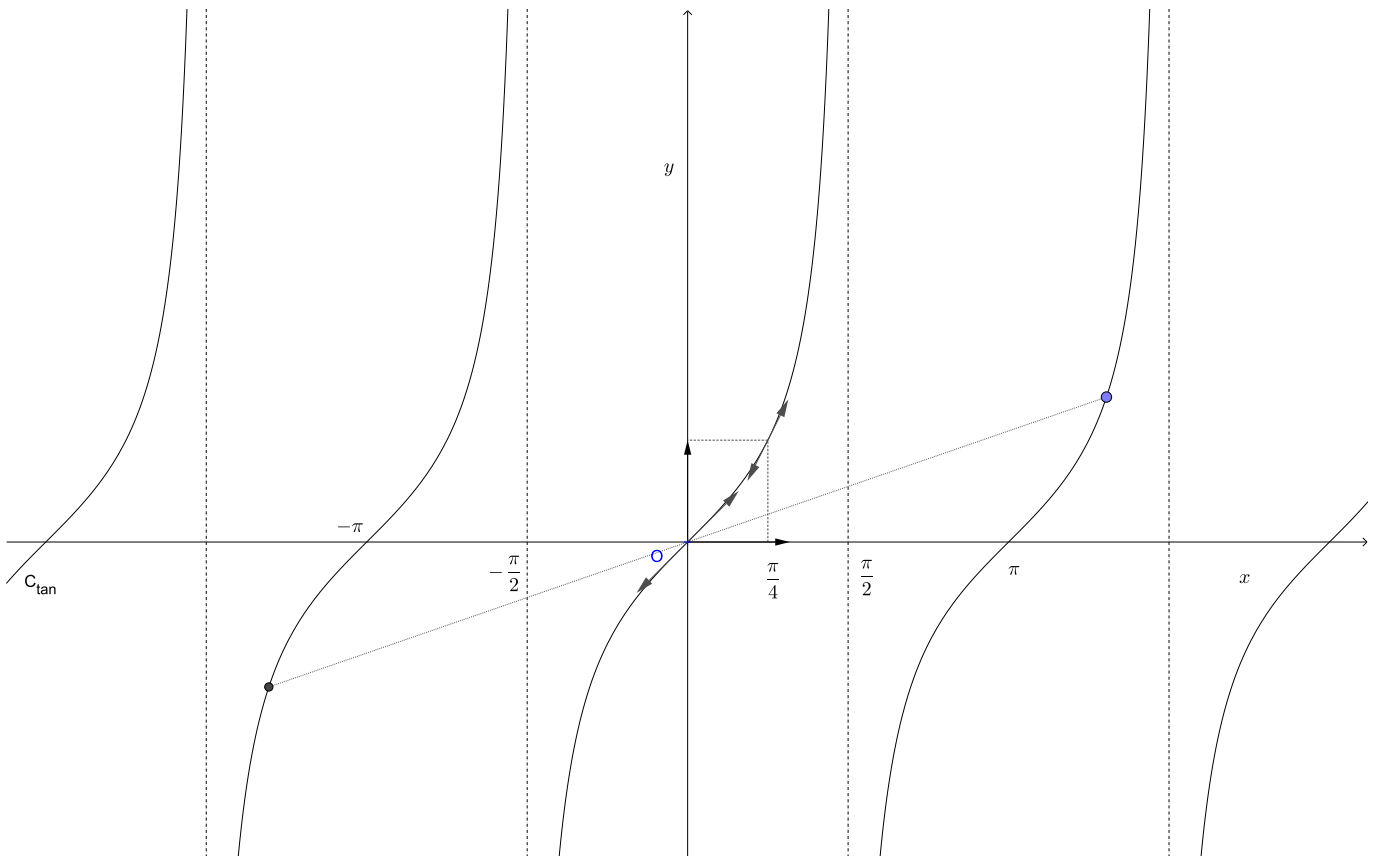
Cette fonction est continue sur D_{\tan} .

Limites :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ >}} \tan(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan(x) = +\infty$$

Elle est dérivable sur D_{\tan} et $\forall x \in D_{\tan}, \quad \tan'(x) = \tan^2(x) + 1 \quad \text{ou} \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Elle impaire et π -périodique.



Fonction partie entière.

Définition :

Soit x un réel, il existe un et un seul entier relatif n vérifiant : $n \leq x < n + 1$
cet entier s'appelle **la partie entière** de x et se note $\lfloor x \rfloor$

Autrement dit : "La partie entière d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x ".

Propriétés :

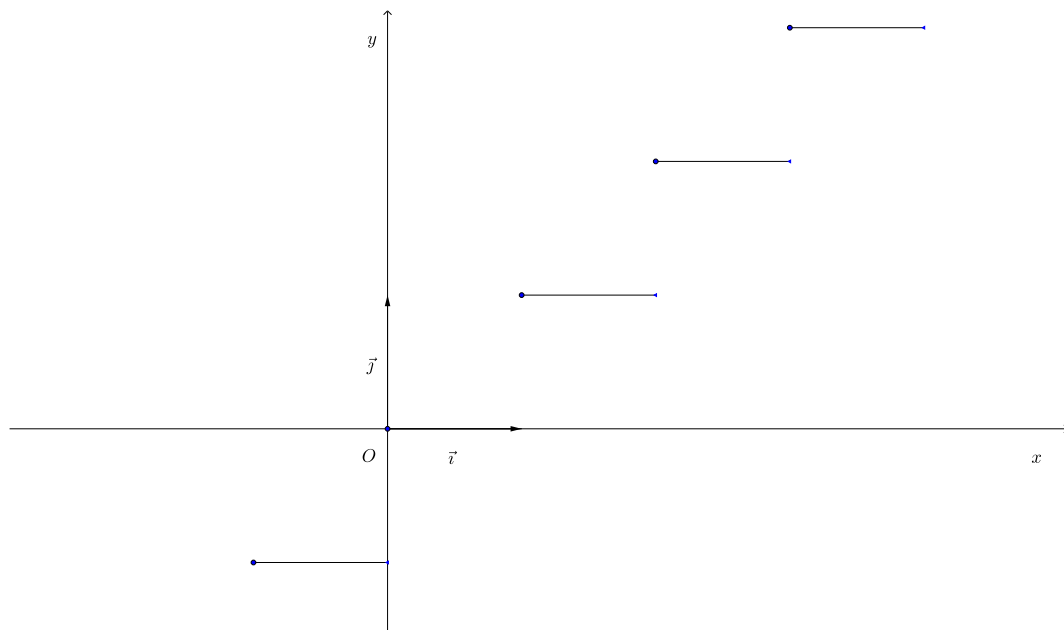
❶ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

❷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

❸ La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur \mathbb{R} .



$x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur \mathbb{R}

$x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et n'est pas continue sur \mathbb{Z} .

$x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est constante sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

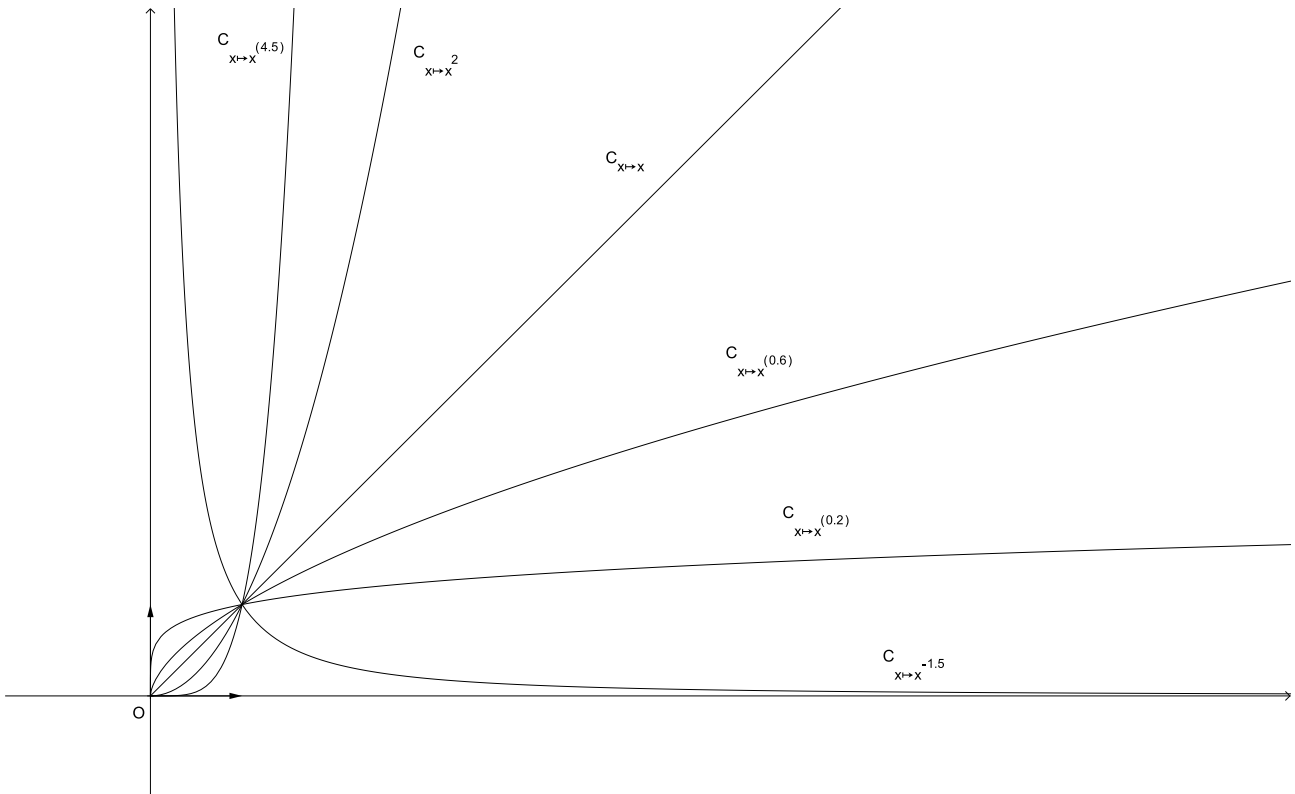
$$x \mapsto x^\alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .

Elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée est : $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$. (*Cela se démontre facilement*)

Sur la représentation suivante on peut distinguer les allures des courbes dans les trois cas suivants :

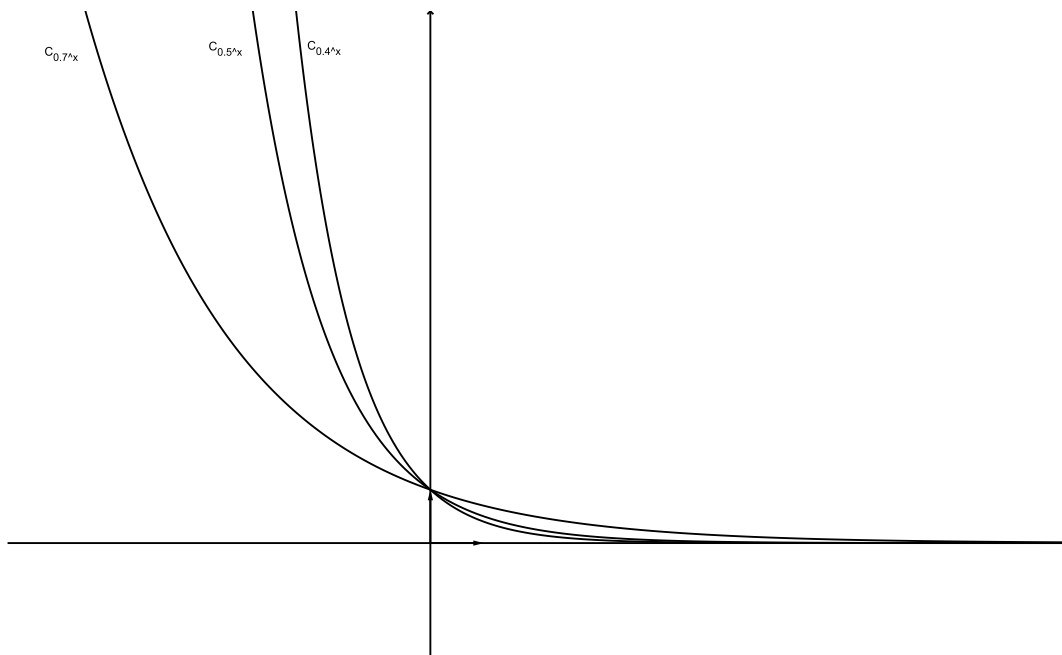
$$\alpha < 0 \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad 1 < \alpha$$



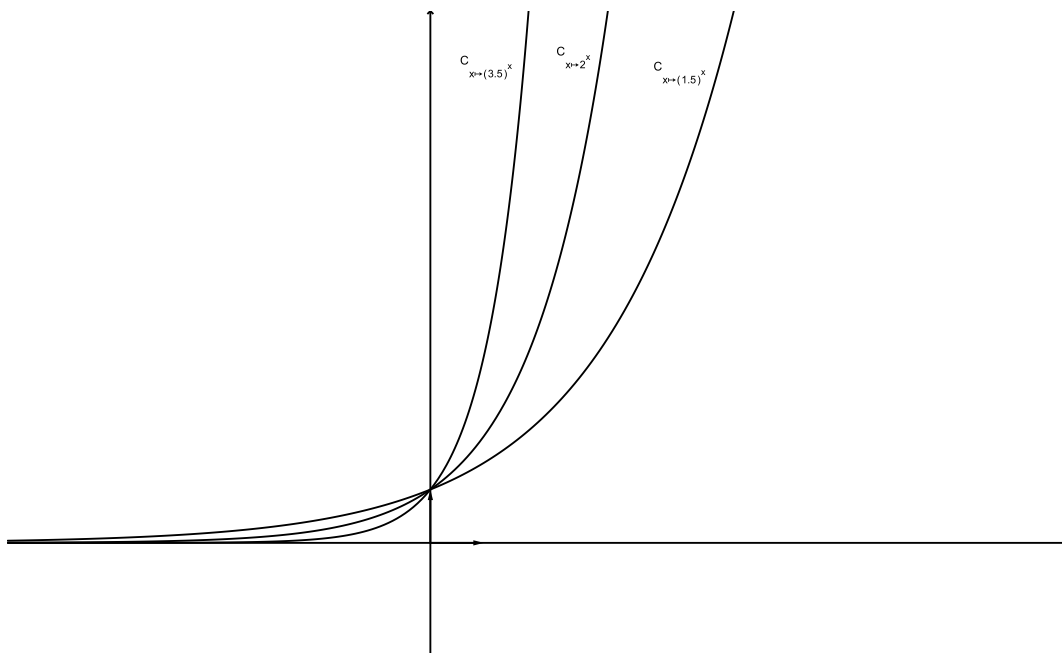
$x \mapsto a^x$ (a un réel strictement positif)

La fonction $x \mapsto a^x$ est définie et continue sur \mathbb{R} . Elle est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est : $x \mapsto \ln(a) a^x$

- Pour $0 < a < 1$, la fonction est strictement décroissante sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$



- Pour $1 < a$, la fonction est strictement croissante sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$



Fonction racine n -ième.

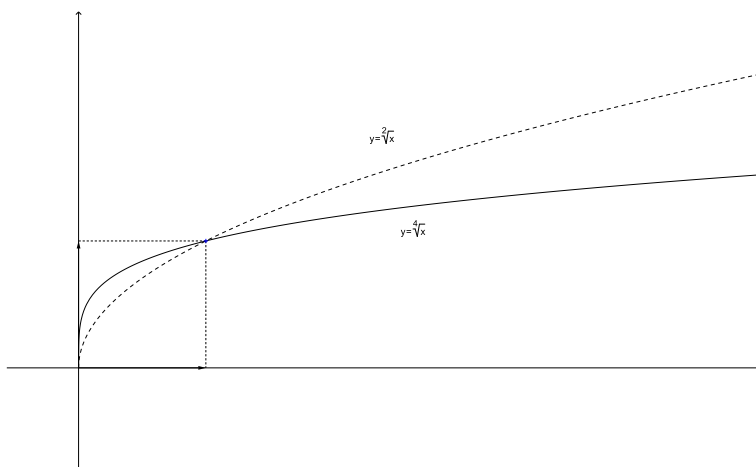
Premier cas : $n \in \mathbb{N}^*$ et n pair.

Définition : On appelle racine n -ième la réciproque de l'application $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^n$

La fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

Elle n'est pas dérivable en 0. Sa courbe possède au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

Elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$



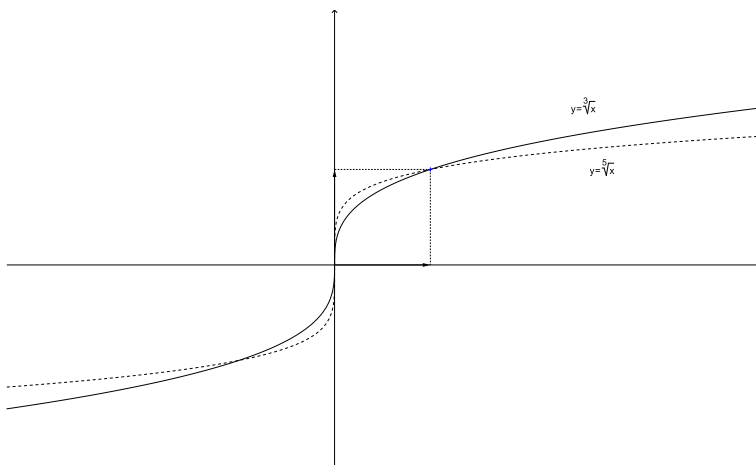
Deuxième cas : $n \in \mathbb{N}$ et n impair.

Définition : On appelle racine n -ième la réciproque de l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^n$

La fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur \mathbb{R} . Elle est impaire.

Elle n'est pas dérivable en 0. Sa courbe possède au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

Elle est dérivable sur \mathbb{R}^* et $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$.



Fonction arctangente.

Définition : On appelle arctangente la réciproque de l'application $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \tan(x)$

Autrement dit :

arctan est la fonction définie sur \mathbb{R} et qui associe à tout réel x , l'unique réel $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ vérifiant $\tan(\theta) = x$

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$
- La fonction arctangente est définie et continue sur \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

- Elle est dérivable et sa dérivée est la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
- Elle est strictement croissante et impaire.
- Pour $x \in \mathbb{R}, y \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $y = \arctan(x) \iff x = \tan(y)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$
- Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$

