Feuille-Cours-2 : Polynômes.

Définition *(Polynôme)*

Ex 1 : *(Vocabulaire)* Donner le degré, le terme constant et le monôme dominant des polynômes suivants :

$$P_1 = 2 - X + 3X^3 \qquad P_2 = (X+1)^6 - X^6 \qquad P_3 = \left(\,(1+i)X^2 + X - 2i\,\right)^3 \qquad P_4 = 2X + 8X^3 + 3X^2$$

Ex 2 : *(Identification).* Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que :

$$X^3 + X^2 - 4X + 6 = \big(X - (1+i)\big)\big(aX^2 + bX + c\big)$$

Ex 3 : *Opérations.* On note : $P = X - 3$, $Q = 2$ et $R = X^2 + X + 5$

Donner une forme développée des polynômes suivants

$$P(X) - 2R(X) \qquad P^2 \qquad P(X)Q(X) \qquad P(X)R(X) \qquad (X+1)P(X)$$

$$P(X+1) \qquad P \times (X+1) \qquad Q(P) \qquad R(P(X)) \qquad R(P(X))$$

– –

Définition *(degré d'un polynôme)*

Théorème *(degré et opérations)*

Ex 4 : Donner le degré des polynômes suivant :

$$P_1 = 2 + X + X^4 \qquad P_2 = (X+2)(5X^2 - 3) \qquad P_3 = (4X+2)^3(1+X)^2 \qquad P_4 = (X+2)^2 - (X^2 - 3)$$

– –

Théorème *(Intégrité)*

Ex 5 :
1) Démontrer ce théorème. *(Indication : il suffit de montrer que si P et Q sont non nuls alors PQ est non nul)*
2) a. Déterminer les polynômes P vérifiant : $P - 2XP = 2X^2 + X - 1$.
   b. Même question avec l'équation : $P^2 + 2XP = 1 + 2X$. *(Même idée que la forme canonique)*
3) Donner deux fonctions non nulles f et g *(différentes de la fonction nulle)* telles que le produit fg est nulle.
4) Donner deux matrices non nulles A et B qui sont telles que le produit AB est nulle.

Définition *(Racine d'un polynôme)*

Théorème *(Racine et factorisation)*

Ex 6 : 1) Démontrer le théorème. *avec les indications suivantes :*

❶ *Commencer par justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X^k - \alpha^k = (X - \alpha)Q_k(X)$*

❷ *Ecrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et calculer $P(X) - P(\alpha)$.*

2) Enoncer la généralisation de ce théorème avec m racines distinctes.

– –

Théorème *(Nombre de racines d'un polynôme.)*

Ex 7 : 1) Soit P est un polynome de degré $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $\forall k \in [\![1; n]\!],\ P(k) = 0$ et $P(0) = 1$.
Déterminer une forme factorisée de P.

2) Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(3t) = P\big(\cos(t)\big)$.
(on traitera séparément l'existence et l'unicité)

– –

Définition *(Racines multiples. Multiplicité.)*

Ex 8 : 1) Déterminer l'ordre de multiplicité de chaque racine de $P = 2(X + 3)^2(2X - 1)(2X + 6)$

2) Factoriser $P = X^4 - 4X^3 + 16X - 16$ sachant que 2 est une racine multiple.

– –

Théorème *(Racine complexe d'un polynôme à coefficients réels)*

Ex 9 : 1) Démontrer ce théorème.

2) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + X - 3$ en remarquant que $P(i) = 0$

3) On note $P = X^4 - 7X^3 + 18X^2 - 22X + 12$.

Trouver toutes les racines de P sachant que $1 + i$ en est une.

– –

Théorème *(Théorème de D'Alembert-Gauss.)*

Ex 10 : 1) On note $P = X^4 + 1$, déterminer les racines réelles de P, déterminer les racines de P.

2) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynome $X^4 - 2X^2 + 1$.