Généralités.

Voir aussi le cours : Fonctions polynomiales réelles.

1.1 Introduction et notation.

Un polynôme est entièrement déterminé par la liste de ses coefficients (des nombres complexes).

Seul un nombre fini de ses coefficients sont non nuls.

La définition la plus simple : Un polynôme est une suite de nombres complexes nuls à partir d'un certain rang.

- On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes et $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
- On a l'inclusion : $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.
- Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si, et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.

On écrira les polynômes comme une somme de monômes : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Pour comprendre les opérations on confondra les polynômes et les fonctions polynomiales de $\mathbb C$ dans $\mathbb C$.

on aura alors
$$X^k: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
 et $\sum_{k=0}^n a_k X^k: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$

Les règles de calcul sur les polynômes sont les mêmes que sur les fonctions polynômiales.

On écrira indifféremment :
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
 et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

 $mais\ il\ faudra\ faire\ attention\ aux\ ambiguït\'e\ dans\ certaines\ expression.$ Exemple: $P(X+1)\ et\ P\times (X+1).$

1.2 Vocabulaire.

Pour
$$P$$
 le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ (un polynôme non nul)

On dit que le polynôme P est sous sa forme développée réduite.

- $a_n X^n$ est le monôme dominant de P.
- n le degré de P.
- a_n le coefficient dominant.
- $a_k X^k$ est **le** monôme d'ordre k de P. (ou de degré k)
- a_k le coefficient d'ordre k de P. (ou de degré k)
- a_0 est **le** terme constant.

Un polynôme est une somme finie de monômes.

Dire qu'un polynôme est **unitaire**, signifie que son coefficient dominant vaut 1.

Dire qu'un polynôme est constant signifie qu'il est nul ou que son degré vaut 0.

1.3 Opérations.

Propriétés : (règles de calcul)

Soient P, Q et R trois polynômes, on a :

1.
$$0+P=P$$
, $P+Q=Q+P$, $(P+Q)+R=P+(Q+R)$

2.
$$P \times 0 = 0$$
, $P \times 1 = P$, $P \times Q = Q \times P$, $P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R$

3.
$$P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$$

• Multiplication par un scalaire. $(\alpha \in \mathbb{C})$

$$\alpha \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k) X^k$$

• Somme de polynômes.

Pour
$$m \le n$$
,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{m} b_k X^k = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) X^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k X^k$$

Remarque:

Avec les deux opérations précédentes, l'ensemble des polynômes est un espace vectoriel.

• Produit de polynômes.

• Produit de deux monômes :
$$aX^n \times bX^m = abX^{n+m}$$

• Frount de deux monomes :
$$aX \times bX = abX$$
• $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \times \sum_{k=0}^{m} b_k X^k = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ ou $c_k = \sum_{i+j=k}^{n} a_i b_j$

Remarques:

• Lorsque
$$a_n \neq 0$$
 et $b_m \neq 0$, le monôme dominant de $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \times \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ est $a_n b_m X^{n+m}$.

• Le terme constant de
$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \times \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$$
 est $a_0 b_0$.

• Dans la somme
$$\sum_{i=0}^{n+m} a_i b_{n+m-i}$$
 le seul terme non nul est celui d'indice $i=n$ donc $c_{n+m}=a_n b_m$

• Composée de polynômes.

Pour
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
 et $Q(X)$ deux polynômes, $P \circ Q$ est le polynôme $P \circ Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q(X)^k$

Remarques:

• En général $P \circ Q \neq Q \circ P$.

• Si
$$Q$$
 n'est pas constant et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ alors

le monôme dominant de $P \circ Q$ est celui de $a_n Q(X)^n$

Et si
$$Q(X) = b_0 + \cdots + b_m X^m$$
 alors le monôme dominant de $Q(X)^n = b_m{}^n X^{nm}$

L'ensemble des polynômes est stable par combinaison linéaire, par produit et par composée.

2

1.4 Degré.

Définition:

Soit
$$P \in \mathbb{C}[X]$$
,

o si
$$P = 0$$
 alors $\deg(P) = -\infty$

2 si
$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$$
 avec $a_n \neq 0$ alors $\deg(P) = n$

Remarques:

- $\bullet \deg(P) = \max\{ i \mid a_i \neq 0 \}$ (on prend comme convention $\max(\emptyset) = -\infty$)
- \bullet Pour P non nul définie par la suite de ses coefficients : le degré de P est l'indice de son dernier coefficient non nul.

Théorème:

Soient P et Q deux polynômes.

- $deg(P+Q) \leq max\{deg(P); deg(Q)\}$
- Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = \deg(Q)$
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P^m) = m \deg(P)$
- 6 (complément) si Q n'est pas constant alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Notation: pour *n* un entier naturel non nul,

 $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

 $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

Remarque.

 $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension n+1.

 $\mathbb{C}_n[X]$ est un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension n+1.

1.5 Intégrité

Théorème : Intégrité.

Soient
$$P$$
 et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$,

$$P \times Q = 0 \iff P = 0$$
 ou $Q = 0$

Démonstration: (voir feuille_cours2)

Attention: Dans ce cours on ne fait pas de quotient de polynômes.

Corollaires:

0 Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$,

$$P \times Q \neq 0 \iff P \neq 0 \text{ et } Q \neq 0$$

2 Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$,

Lorsque $Q \neq 0$, on a l'équivalence : $QP = QR \iff P = R$.

3 Soient P_1, P_2, \ldots, P_n des polynômes :

$$P_1 P_2 P_3 \cdots P_n = 0 \iff \exists i \in [1; n], \quad P_i = 0$$

Autrement dit: Un produit de polynômes est nul si, et seulement si, un de ses facteurs est nul.

En effet:

Racines.

2.1 Racine et factorisation

Définition (Racine de P):

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,

Dire que α est une racine de P signifie que : $P(\alpha)=0$

Théorème :

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,

 $P(\alpha) = 0$ si, et seulement si, il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$

Démonstration: (voir feuille_cours2)

Théorème:

Soient P un polynôme et k un entier naturel non nul,

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont k racines distinctes de P alors P est factorisable par :

$$(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_k)$$

ou encore $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_k)$ divise P

Démonstration :

Conséquences:

- Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ a au plus n racines distinctes.
- Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
- Un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ ayant plus de n+1 racines est nul.
- Si un polynôme a une infinité de racines alors c'est le polynôme nul.

2.2 Racine multiple. Multiplicité.

 ${\bf D\'efinition}: {\it Racine \ multiple}.$

Soient $a\in\mathbb{C}$ et P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$

Dire que α est une racine multiple de P,

signifie qu'il existe un polynôme Q tel que : $P(X) = (X - \alpha)^2 Q(X)$.

Définition : Multiplicité.

Soient $a \in \mathbb{C}$, P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et m un entier naturel non nul.

Dire que α est une racine de P d'ordre de multiplicité m

signifie qu'il existe un polynôme Q tel que : $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Théorème:

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, r un entier naturel non nul.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ sont des racines distincts de P d'ordre respectif $m_1, m_2, \dots m_r$ alors

il existe
$$Q \in \mathbb{C}[X]$$
 tel que $P(X) = \left(\prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}\right) Q(X)$ et $\forall i \in [1; r], \ Q(\alpha_i) \neq 0$.

Démonstration:

Conséquence:

Un polynôme de degré n $(n \ge 0)$ possède au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

Exemple:

2.3 Racine complexe d'un polynôme à coefficients réels

Théorème:

Soient P(X) un polynôme et α un nombre complexe.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si α est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ est une racine de P.

${\bf D\'{e}monstration}:$

Soient $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ un polynôme et α un nombre complexe.

On suppose que P est à coefficients réels et que $P(\alpha) = 0$,

$$P(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} a_{k}(\overline{\alpha})^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{k} \overline{\alpha^{k}} \qquad \overline{z^{n}} = \overline{z}^{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{k}} \alpha^{k} \qquad \operatorname{car} \ a_{k} \in \mathbb{R} \text{ et } \overline{zz'} = \overline{z} \overline{z'}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{k} \alpha^{k} \qquad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$= \overline{P(\alpha)}$$

$$= 0 \qquad \operatorname{car} P(\alpha) = 0$$

si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si α est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ est une racine de P

5

2.4 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Théorème : (admis) (d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant admet une racine dans \mathbb{C} .

Théorème:

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$,

0 Il existe des complexes $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$P(X) = \lambda(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$$

2 Il existe un entier $p \leq n$, des complexes $\lambda, r_1, r_2, \ldots, r_p$ et des entiers non nuls m_1, \ldots, m_p tels que :

$$r_1, r_2, \dots, r_p$$
 sont distinctes et $P(X) = \lambda (X - r_1)^{m_1} (X - r_2)^{m_2} \cdots (X - r_p)^{m_p}$

Remarques:

- ullet Ces écritures sont les formes factorisées de P.
- \bullet On dit aussi que P est décomposé en produit de facteurs irréductibles.
- Dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1. (Ils admettent comme diviseurs que les constantes non nulles et eux-mêmes.)
- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n, possède exactement n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.
- Attention : ces théorèmes sont faux quand on se restreint à des polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

Compl'ements:

Dérivation (complément).

3.1 Polynome dérivé.

${\bf D\acute{e}finition}:$

Soit
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
 un polynôme de $\mathbb{C}[X]$,

on appelle polynôme dérivé de P(X) le polynôme :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$
 ou $P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$

Remarques:

- Ici pas besoin de justifier une dérivabilité comme pour les fonctions.
- La définition est cohérente avec le cours sur la dérivation des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- P(X) est constant équivaut à P'(X) = 0

(Attention avec les fonctions on a en plus besoin de dérivable sur un intervalle).

Propriétés:

 $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et P(X), Q(X) deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$,

- $(\lambda P + \mu Q)'(X) = \lambda P'(X) + \mu Q'(X)$
- $\bullet \quad (PQ)'(X) = P'(X)Q(X) + P(X)Q'(X)$
- $(P^m)'(X) = mP'(X)P^{m-1}(X)$
- $\bullet \quad (Q \circ P)'(X) = P'(X).Q'(P(X))$

Dérivation et degré.

Soit P(X) un polynôme non constant $(\deg P \ge 1)$,

$$\deg(P') = \deg(P) - 1$$

3.2 Dérivées successives.

Définition :

On définit, par récurrence sur k, les polynômes dérivés successifs de P:

$$\left\{ \begin{array}{l} P^{(0)}(X) = P(X) \\ \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)}(X) = \left(P^{(k)}\right)'(X) \end{array} \right.$$

Propriété:

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$
, m un entier et $P(X), Q(X)$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, $(\lambda P + \mu Q)^{(m)}(X) = \lambda P^{(m)}(X) + \mu Q^{(m)}(X)$

Proposition:

Le dérivé *i*-ième du monôme $a_k X^k$ est égale :

à
$$0$$
 si $i > k$

à
$$0$$
 $\sin i > k$
à $a_k \times \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$ $\sin 0 \leqslant i \leqslant k$

Remarques:

- la dérivée k-ième de $a_k X^k$ est le polynôme constant $a_k \times k!$

- le monôme dominant de $P^{(k)}(X)$ est : $a_n \times \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$

- le terme constant de $P^{(k)}(X)$ est égal à : $a_k \times k!$, ou encore $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

- si k > n et $\deg(P(X)) = n$ alors $P^{(k)}(X) = 0$

Compléments: