1 Généralités.

Voir aussi le cours : Fonctions polynomiales réelles.

1.1 Introduction et notation.

Un polynôme est entièrement déterminé par la liste de ses coefficients (des nombres complexes).
Seul un nombre fini de ses coefficients sont non nuls.
La définition la plus simple : Un polynôme est une suite de nombres complexes nuls à partir d'un certain rang.

- On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes et $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
- On a l'inclusion : $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.
- Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si, et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.

On écrira les polynômes comme une somme de monômes : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Pour comprendre les opérations on confondra les polynômes et les fonctions polynomiales de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

on aura alors $X^k : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^k \end{array}$ et $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \end{array}$

Les règles de calcul sur les polynômes sont les mêmes que sur les fonctions polynômiales.

On écrira indifféremment : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

mais il faudra faire attention aux ambiguïté dans certaines expression. Exemple : $P(X+1)$ et $P \times (X+1)$.

1.2 Vocabulaire.

Pour P le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$

On dit que le polynôme P est sous sa **forme développée réduite**.

- $a_n X^n$ est **le** monôme dominant de P.
- n **le** degré de P.
- a_n **le** coefficient dominant.
- $a_k X^k$ est **le** monôme d'ordre k de P. (ou de degré k)
- a_k **le** coefficient d'ordre k de P. (ou de degré k)
- a_0 est **le** terme constant.

Un polynôme est une somme finie de monômes.
Dire qu'un polynôme est **unitaire**, signifie que son terme dominant vaut 1.
Dire qu'un polynôme est **constant** signifie qu'il est nul ou que son degré vaut 0.

1.3 Opérations.

- **Multiplication par un scalaire.** ($\alpha \in \mathbb{C}$)

$$\boxed{\alpha \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k) X^k}$$

- **Somme de polynômes.**

Pour $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{m} b_k X^k = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) X^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k X^k$$

Remarque :

Avec les deux opérations précédentes, **l'ensemble des polynômes est un espace vectoriel**.

- **Produit de polynômes.**

Propriétés : *(règles de calcul)*

- Produit de deux monômes : $aX^n \times bX^m = abX^{n+m}$
- Soient P, Q et R trois polynômes, on a :
  1. $0 + P = P, \quad P + Q = Q + P, \quad (P + Q) + R = P + (Q + R)$
  2. $P \times 1 = P, \quad P \times Q = Q \times P, \quad P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R$
  3. $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$

Coefficients *(Complément)*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \times \sum_{k=0}^{m} b_k X^k = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \qquad \text{avec} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \quad \text{ou} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Remarques :

- Lorsque $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, le monôme dominant de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \times \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ est $a_n b_m X^{n+m}$.
- Le terme constant de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \times \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ est $a_0 b_0$.
- $\displaystyle c_{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} a_i b_{n+m-i} = a_n b_m$ le seul terme non nul est celui d'indice $k = n$.

- **Composée de polynômes.**

Pour $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X)$ deux polynômes, $P \circ Q$ est le polynôme $P \circ Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k Q(X)^k$

Remarques :

- En général $P \circ Q \neq Q \circ P$.
- Si Q n'est pas constant et $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ alors

le monôme dominant de $P \circ Q$ est celui de $a_n Q(X)^n$

Et si $Q(X) = b_0 + \cdots + b_m X^m$ alors le monôme dominant de $Q(X)^n = {b_m}^n X^{nm}$

L'ensemble des polynômes est stable par combinaison linéaire, par produit et par composée.

1.4 Degré.

Définition :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$,

❶ si $P = 0$ alors $\deg(P) = -\infty$

❷ si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$ alors $\deg(P) = n$

Remarques :

- $\deg(P) = \max\{\ i \mid a_i \neq 0\}$ (*on rappelle que* $\max(\varnothing) = -\infty$)
- Pour P non nul définie par la suite de ses coefficients :
  le degré de P est l'indice de son dernier coefficient non nul.

Théorème :

Soient P et Q deux polynômes.

❶ $\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg(P); \deg(Q)\}$

❷ Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = \deg(Q)$

❸ $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

❹ Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P^m) = m \deg(P)$

❺ *(complément)*
si Q n'est pas constant alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Notation : pour n un entier naturel non nul,

$\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
$\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

Remarque.

$\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n+1$.
$\mathbb{C}_n[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n+1$.

1.5 Intégrité

Théorème : *Intégrité.*

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$,

$$P \times Q = 0 \iff P = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0$$

Démonstration : *(voir feuille_cours2)*

Remarque : *Dans ce cours on ne fait pas de quotient de polynômes.*

Corollaires :

❶ Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$,

$$P \times Q \neq 0 \iff P \neq 0 \quad \text{et} \quad Q \neq 0$$

❷ Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$,

Lorsque $Q \neq 0$, on a l'équivalence : $QP = QR \iff P = R.$

❸ Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ des polynômes :

$$P_1 P_2 P_3 \cdots P_n = 0 \iff \exists i \in [\![1; n]\!], \quad P_i = 0$$

Autrement dit : Un produit de polynômes est nul si, et seulement si, un de ses facteurs est nul.

En effet :

2

Racines.

2.1 Racine et factorisation

Définition (*Racine de P*) :

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,
Dire que α est une racine de P signifie que : $P(\alpha) = 0$

Théorème :

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,
$P(\alpha) = 0$ si, et seulement si, il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$

Démonstration : *(voir feuille_cours2)*

Théorème :

Soient P un polynôme et k un entier naturel non nul,
Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont k **racines distinctes** de P alors P est factorisable par :

$$(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_k)$$

Démonstration :

Conséquences :
- Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ a au plus n racines distinctes.
- Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
- Un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ ayant plus de $n + 1$ racines est nul.
- Si une fonction polynomiale s'annule sur un ensemble infini alors elle est nulle.
- Si deux fonctions polynomiales coïncident sur un ensemble infini alors elles sont égales.

2.2 Racine multiple. Multiplicité.

Définition : *Racine multiple.*

Soient $a \in \mathbb{C}$ et P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$
Dire que α est une racine multiple de P,
signifie qu'il existe un polynôme Q tel que : $P(X) = (X - \alpha)^2 Q(X)$.

Définition : *Multiplicité.*

Soient $a \in \mathbb{C}$, P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et m un entier naturel non nul.
Dire que α est une racine de P d'ordre de multiplicité m
signifie qu'il existe un polynôme Q tel que : $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Théorème :

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, r un entier naturel non nul.

Si α_1, α_2, $\dots\alpha_r$ sont des racines distincts de P d'ordre respectif m_1, m_2, $\dots m_r$ alors

$$\text{il existe } Q \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } P(X) = \left(\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i}\right)Q(X) \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1;r]\!],\ Q(\alpha_i) \neq 0.$$

Conséquence :

Un polynôme de degré n ($n \geqslant 0$) possède au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

2.3 Racine complexe d'un polynôme à coefficients réels

Théorème :

Soient $P(X)$ un polynôme et α un nombre complexe.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si α est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ est une racine de P.

Démonstration : *(voir feuille_cours_2)*

2.4 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Théorème : (admis) (*d'Alembert-Gauss*)

Tout polynôme non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème :

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$,

❶ Il existe des complexes $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$P(X) = \lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)$$

❷ Il existe un entier $p \leqslant n$, des complexes $\lambda, r_1, r_2, \dots, r_p$ et des entiers non nuls $m_1, \dots, m_p$ tels que :

$$r_1, r_2, \dots, r_p \text{ sont distinctes et } \quad P(X) = \lambda(X-r_1)^{m_1}(X-r_2)^{m_2}\cdots(X-r_p)^{m_p}$$

Remarques :

• Ces écritures sont les formes factorisées de P.

• On dit aussi que P est décomposé en produit de facteurs irréductibles.

• Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n, possède exactement n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

• Attention : ce théorème est faux quand on se restreint à $\mathbb{R}[X]$.

3 Dérivation (complément).

3.1 Polynome dérivé.

Définition :

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$,

on appelle polynôme dérivé de $P(X)$ le polynôme :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_{k+1} X^k$$

Remarques :

- Ici pas besoin de justifier la dérivabilité.
- La définition est cohérente avec le cours sur la dérivation des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- $P(X)$ est constant équivaut à $P'(X) = 0$

(Attention avec les fonctions on a en plus besoin de ***dérivable*** *sur un* ***intervalle****).*

Propriétés :

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $P(X), Q(X)$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$,

- $(\lambda P + \mu Q)'(X) = \lambda P'(X) + \mu Q'(X)$
- $(PQ)'(X) = P'(X)Q(X) + P(X)Q'(X)$
- $(P^m)'(X) = mP'(X)P^{m-1}(X)$
- $(Q \circ P)'(X) = P'(X).Q'(P(X))$

Dérivation et degré.

Soit $P(X)$ un polynôme non constant ($\deg P \geqslant 1$),

$$\deg(P') = \deg(P) - 1$$

3.2 Dérivées successives.

Définition :

On définit, par récurrence sur k, les polynômes dérivés successifs de P :

$$\begin{cases} P^{(0)}(X) = P(X) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)}(X) = \left(P^{(k)}\right)'(X) \end{cases}$$

Propriété :

$(\lambda\,,\mu) \in \mathbb{C}^2$, m un entier et $P(X), Q(X)$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$,

$$(\lambda P + \mu Q)^{(m)}(X) = \lambda P^{(m)}(X) + \mu Q^{(m)}(X)$$

Proposition :

Le dérivé i-ième du monôme $a_k X^k$ est égale :

à $\quad 0 \quad$ si $\ i > k$

à $\quad a_k \times \dfrac{k!}{(k-i)!}\, X^{k-i} \quad$ si $0 \leqslant i \leqslant k$

Remarques :

- la dérivée k-ième de $a_k X^k$ est le polynôme constant $a_k \times k!$
- le monôme dominant de $P^{(k)}(X)$ est : $a_n \times \dfrac{n!}{(n-k)!}\, X^{n-k}$
- le terme constant de $P^{(k)}(X)$ est égal à : $a_k \times k!$, ou encore $\boxed{a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}}$
- si $k > n$ et $\deg(P(X)) = n$ alors $P^{(k)}(X) = 0$