

# Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| <b>1 Généralités.</b>  | <b>2</b> |
| 1.1 Introduction et notation. . . . .                            | 2        |
| 1.2 Vocabulaire. . . . .   | 2        |
| 1.3 Opérations. . . . .  | 3        |
| 1.4 Degré. . . . .   | 4        |
| 1.5 Intégrité . . . . .  | 4        |
| <b>2 Racines.</b>  | <b>5</b> |
| 2.1 Racine et factorisation . . . . .                            | 5        |
| 2.2 Racine multiple. Multiplicité. . . . .                       | 5        |
| 2.3 Racine complexe d'un polynôme à coefficients réels . . . . . | 6        |
| 2.4 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ . . . . .                 | 7        |
| <b>3 Dérivation (complément).</b>                                | <b>8</b> |
| 3.1 Polynome dérivé. . . . .                                     | 8        |
| 3.2 Dérivées successives. . . . .                                | 8        |

## Généralités.

Voir aussi le cours : Fonctions polynomiales réelles.

## 1.1 Introduction et notation.

Un polynôme est entièrement déterminé par la liste de ses coefficients (des nombres complexes).

Seul un nombre fini de ses coefficients sont non nuls.

*La définition la plus simple : Un polynôme est une suite de nombres complexes nuls à partir d'un certain rang.*

- On note  $\mathbb{C}[X]$  l'ensemble des polynômes et  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
- On a l'inclusion :  $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ .
- Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si, et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.

On écrira les polynômes comme une somme de monômes :  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$

Pour comprendre les opérations on confondra les polynômes et les fonctions polynomiales de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .

$$\text{on aura alors } \begin{array}{ccc} X^k : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^k \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \sum_{k=0}^n a_k X^k : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{k=0}^n a_k z^k \end{array}$$

Les règles de calcul sur les polynômes sont les mêmes que sur les fonctions polynomiales.

On écrira indifféremment :  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ .

*mais il faudra faire attention aux ambiguïté dans certaines expression. Exemple :  $P(X+1)$  et  $P \times (X+1)$ .*

## 1.2 Vocabulaire.

Pour  $P$  le polynôme  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $a_n \neq 0$  (un polynôme non nul)

On dit que le polynôme  $P$  est sous sa **forme développée réduite**.

- $a_n X^n$  est le monôme dominant de  $P$ .
- $n$  le degré de  $P$ .
- $a_n$  le coefficient dominant.
- $a_k X^k$  est le monôme d'ordre  $k$  de  $P$ . (ou de degré  $k$ )
- $a_k$  le coefficient d'ordre  $k$  de  $P$ . (ou de degré  $k$ )
- $a_0$  est le terme constant.

Un polynôme est une somme finie de monômes.

Dire qu'un polynôme est **unitaire**, signifie que son coefficient dominant vaut 1.

Dire qu'un polynôme est **constant** signifie qu'il est nul ou que son degré vaut 0.

### 1.3 Opérations.

Propriétés : (règles de calcul)

Soient  $P, Q$  et  $R$  trois polynômes, on a :

1.  $0 + P = P, \quad P + Q = Q + P, \quad (P + Q) + R = P + (Q + R)$
2.  $P \times 0 = 0, \quad P \times 1 = P, \quad P \times Q = Q \times P, \quad P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R$
3.  $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$

- Multiplication par un scalaire. ( $\alpha \in \mathbb{C}$ )

$$\alpha \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n (\alpha a_k) X^k$$

- Somme de polynômes.

Pour  $m \leq n$ ,

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{k=0}^m b_k X^k = \sum_{k=0}^m (a_k + b_k) X^k + \sum_{k=m+1}^n a_k X^k$$

Remarque :

Avec les deux opérations précédentes, l'ensemble des polynômes est un espace vectoriel.

- Produit de polynômes.

• Produit de deux monômes :  $aX^n \times bX^m = abX^{n+m}$

•  $\sum_{k=0}^n a_k X^k \times \sum_{k=0}^m b_k X^k = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$  avec  $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$  ou  $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$

Remarques :

- Lorsque  $a_n \neq 0$  et  $b_m \neq 0$ , le monôme dominant de  $\sum_{k=0}^n a_k X^k \times \sum_{k=0}^m b_k X^k$  est  $a_n b_m X^{n+m}$ .

- Le terme constant de  $\sum_{k=0}^n a_k X^k \times \sum_{k=0}^m b_k X^k$  est  $a_0 b_0$ .

- Dans la somme  $\sum_{i=0}^{n+m} a_i b_{n+m-i}$  le seul terme non nul est celui d'indice  $i = n$  donc  $c_{n+m} = a_n b_m$

- Composée de polynômes.

Pour  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q(X)$  deux polynômes,  $P \circ Q$  est le polynôme  $P \circ Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k Q(X)^k$

Remarques :

- En général  $P \circ Q \neq Q \circ P$ .

- Si  $Q$  n'est pas constant et  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $a_n \neq 0$  alors

le monôme dominant de  $P \circ Q$  est celui de  $a_n Q(X)^n$

Et si  $Q(X) = b_0 + \dots + b_m X^m$  alors le monôme dominant de  $Q(X)^n = b_m^n X^{nm}$

-----

L'ensemble des polynômes est stable par combinaison linéaire, par produit et par composée.

## 1.4 Degré.

**Définition :**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,

- ❶ si  $P = 0$  alors  $\deg(P) = -\infty$
- ❷ si  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  avec  $a_n \neq 0$  alors  $\deg(P) = n$

**Remarques :**

- $\deg(P) = \max\{i \mid a_i \neq 0\}$  (on prend comme convention  $\max(\emptyset) = -\infty$ )
- Pour  $P$  non nul définie par la suite de ses coefficients :  
le degré de  $P$  est l'indice de son dernier coefficient non nul.

**Théorème :**

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes.

- ❶  $\deg(P + Q) \leq \max\{\deg(P); \deg(Q)\}$
- ❷ Si  $\deg(P) < \deg(Q)$  alors  $\deg(P + Q) = \deg(Q)$
- ❸  $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- ❹ Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\deg(P^m) = m \deg(P)$
- ❺ (complément)  
si  $Q$  n'est pas constant alors  $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

**Notation :** pour  $n$  un entier naturel non nul,

$\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

$\mathbb{C}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

**Remarque.**

$\mathbb{R}_n[X]$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $n + 1$ .

$\mathbb{C}_n[X]$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $n + 1$ .

## 1.5 Intégrité

**Théorème :** *Intégrité.*

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$ ,

$$P \times Q = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0$$

**Démonstration :** (voir feuille\_cours2)

**Attention :** Dans ce cours on ne fait pas de quotient de polynômes.

**Corollaires :**

❶ Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$ ,

$$P \times Q \neq 0 \iff P \neq 0 \text{ et } Q \neq 0$$

❷ Soient  $P, Q$  et  $R$  trois polynômes de  $\mathbb{C}[X]$ ,

$$\text{Lorsque } Q \neq 0, \text{ on a l'équivalence : } QP = QR \iff P = R.$$

❸ Soient  $P_1, P_2, \dots, P_n$  des polynômes :

$$P_1 P_2 P_3 \dots P_n = 0 \iff \exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket, P_i = 0$$

**Autrement dit :** Un produit de polynômes est nul si, et seulement si, un de ses facteurs est nul.

**En effet :**

## Racines.

### 2.1 Racine et factorisation

**Définition** (*Racine de  $P$* ) :

Soient  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  
Dire que  $\alpha$  est une racine de  $P$  signifie que :  $P(\alpha) = 0$

**Théorème** :

Soient  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  
 $P(\alpha) = 0$  si, et seulement si, il existe un polynôme  $Q$  tel que  $P = (X - \alpha)Q$

**Démonstration** : (*voir feuille\_cours2*)

**Théorème** :

Soient  $P$  un polynôme et  $k$  un entier naturel non nul,  
Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  sont  $k$  **racines distinctes** de  $P$  alors  $P$  est factorisable par :

$$(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_k)$$

*ou encore  $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_k)$  divise  $P$*

**Démonstration** :

**Conséquences** :

- Un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  a au plus  $n$  racines distinctes.
- Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
- Un polynôme de  $\mathbb{C}_n[X]$  ayant plus de  $n + 1$  racines est nul.
- Si un polynôme a une infinité de racines alors c'est le polynôme nul.

### 2.2 Racine multiple. Multiplicité.

**Définition** : *Racine multiple.*

Soient  $a \in \mathbb{C}$  et  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$   
Dire que  $\alpha$  est une racine multiple de  $P$ ,  
signifie qu'il existe un polynôme  $Q$  tel que :  $P(X) = (X - \alpha)^2 Q(X)$ .

**Définition** : *Multiplicité.*

Soient  $a \in \mathbb{C}$ ,  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  et  $m$  un entier naturel non nul.  
Dire que  $\alpha$  est une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $m$   
signifie qu'il existe un polynôme  $Q$  tel que :  $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$  et  $Q(\alpha) \neq 0$ .

**Théorème :**

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ ,  $r$  un entier naturel non nul.

Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  sont des racines distincts de  $P$  d'ordre respectif  $m_1, m_2, \dots, m_r$  alors

il existe  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(X) = \left( \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right) Q(X)$  et  $\forall i \in [1; r], Q(\alpha_i) \neq 0$ .

**Démonstration :**

**Conséquence :**

Un polynôme de degré  $n$  ( $n \geq 0$ ) possède au plus  $n$  racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

**Exemple :**

## 2.3 Racine complexe d'un polynôme à coefficients réels

**Théorème :**

Soient  $P(X)$  un polynôme et  $\alpha$  un nombre complexe.

Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  et si  $\alpha$  est une racine de  $P$  alors  $\bar{\alpha}$  est une racine de  $P$ .

**Démonstration :**

Soient  $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  un polynôme et  $\alpha$  un nombre complexe.

On suppose que  $P$  est à coefficients réels et que  $P(\alpha) = 0$ ,

$$\begin{aligned} P(\bar{\alpha}) &= \sum_{k=0}^n a_k (\bar{\alpha})^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \bar{\alpha}^k && \bar{z}^n = \overline{z^n} \\ &= \sum_{k=0}^n \overline{a_k \alpha^k} && \text{car } a_k \in \mathbb{R} \text{ et } \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}' \\ &= \overline{\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k} && \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \\ &= \overline{P(\alpha)} \\ &= 0 && \text{car } P(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

si  $P \in \mathbb{R}[X]$  et si  $\alpha$  est une racine de  $P$  alors  $\bar{\alpha}$  est une racine de  $P$

## 2.4 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ .

**Théorème :** (admis) (*d'Alembert-Gauss*)

Tout polynôme non constant admet une racine dans  $\mathbb{C}$ .

**Théorème :**

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  tel que  $\deg(P) = n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

- ❶ Il existe des complexes  $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  tels que :

$$P(X) = \lambda(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$$

- ❷ Il existe un entier  $p \leq n$ , des complexes  $\lambda, r_1, r_2, \dots, r_p$  et des entiers non nuls  $m_1, \dots, m_p$  tels que :

$$r_1, r_2, \dots, r_p \text{ sont distinctes et } P(X) = \lambda(X - r_1)^{m_1}(X - r_2)^{m_2} \cdots (X - r_p)^{m_p}$$

**Remarques :**

- Ces écritures sont les formes factorisées de  $P$ .
- On dit aussi que  $P$  est décomposé en produit de facteurs irréductibles.
- Dans  $\mathbb{C}[X]$  les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.  
(Ils admettent comme diviseurs que les constantes non nulles et eux-mêmes.)
- Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ , possède exactement  $n$  racines comptées avec leur ordre de multiplicité.
- Attention : ces théorèmes sont faux quand on se restreint à des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$ .

---

**Compléments :**

## Dérivation (complément).

### 3.1 Polynôme dérivé.

Définition :

Soit  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ ,

on appelle polynôme dérivé de  $P(X)$  le polynôme :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} \quad \text{ou} \quad P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

Remarques :

- Ici pas besoin de justifier une dérivabilité comme pour les fonctions.
- La définition est cohérente avec le cours sur la dérivation des fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $P(X)$  est constant équivaut à  $P'(X) = 0$   
(Attention avec les fonctions on a en plus besoin de **dérivable** sur un **intervalle**).

Propriétés :

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  et  $P(X), Q(X)$  deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$ ,

- $(\lambda P + \mu Q)'(X) = \lambda P'(X) + \mu Q'(X)$
- $(PQ)'(X) = P'(X)Q(X) + P(X)Q'(X)$
- $(P^m)'(X) = mP'(X)P^{m-1}(X)$
- $(Q \circ P)'(X) = P'(X).Q'(P(X))$

Dérivation et degré.

Soit  $P(X)$  un polynôme non constant ( $\deg P \geq 1$ ),

$$\deg(P') = \deg(P) - 1$$

### 3.2 Dérivées successives.

Définition :

On définit, par récurrence sur  $k$ , les polynômes dérivés successifs de  $P$  :

$$\begin{cases} P^{(0)}(X) = P(X) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)}(X) = (P^{(k)})'(X) \end{cases}$$

**Propriété :**

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, m \text{ un entier et } P(X), Q(X) \text{ deux polynômes de } \mathbb{C}[X],$$
$$(\lambda P + \mu Q)^{(m)}(X) = \lambda P^{(m)}(X) + \mu Q^{(m)}(X)$$

**Proposition :**

Le dérivé  $i$ -ième du monôme  $a_k X^k$  est égale :

$$\begin{aligned} &\text{à } 0 && \text{si } i > k \\ &\text{à } a_k \times \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} && \text{si } 0 \leq i \leq k \end{aligned}$$

**Remarques :**

- la dérivée  $k$ -ième de  $a_k X^k$  est le polynôme constant  $a_k \times k!$

- le monôme dominant de  $P^{(k)}(X)$  est :  $a_n \times \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$

- le terme constant de  $P^{(k)}(X)$  est égal à :  $a_k \times k!$ , ou encore  $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

- si  $k > n$  et  $\deg(P(X)) = n$  alors  $P^{(k)}(X) = 0$

---

**Compléments :**