Table des matières

1 Généralités.

1.1 Définitions et notation.

Définition

On appelle fonction polynomiale réelle toute application P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et $n+1$ réels $a_0, a_1, \dots a_n$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

Cette application sera notée : $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et on note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles.

1.2 Identification des coefficients.

Lemme :

Soient n un entier naturel et $n+1$ réels : $a_0,\, a_1,\, \dots,\, a_n$.

$$\textbf{Si} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \quad \textbf{alors} \quad \forall k \in [\![0;n]\!], \quad a_k = 0$$

Conséquence :

Une fonction polynomiale P est non nul si, et seulement si,
il peut s'écrire : $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad$ avec $a_n \neq 0$

Théorème : (*Identification des coefficients*)

Soient P et Q dans $\mathbb{R}[x]$ non nuls avec :

$$\begin{cases} P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n & \text{avec } a_n \neq 0 \\ Q : x \longmapsto b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m & \text{avec } b_m \neq 0 \end{cases}$$

On a l'équivalence suivante : $P = Q \iff \begin{cases} n = m \\ \forall k \in [\![0;n]\!], \quad a_k = b_k \end{cases}$

1.3 Vocabulaire.

Pour $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad$ avec $a_n \neq 0$
On dit que la fonction polynômiale P est sous sa **forme développée réduite**.

- $x \mapsto a_n x^n$ est le monôme dominant de P.
- n le degré de P.
- a_n le coefficient dominant.
- $x \mapsto a_k x^k$ est le monôme d'ordre k de P. (ou de degré k)
- a_k le coefficient d'ordre k de P. (ou de degré k)
- a_0 est le terme constant.

Dire qu'une fonction polynomiale est **unitaire**, signifie que son terme dominant vaut 1.

1.4 Opérations.

La somme, produit et composée de fonctions polynômiales est une fonction polynômiale.

Si $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2$ alors $P+Q \in \mathbb{R}[x]$, $P \times Q \in \mathbb{R}[x]$ et $P \circ Q \in \mathbb{R}[x]$

Propriétés : *(de la somme et du produit)*

Soient P, Q et R trois éléments de $\mathbb{R}[x]$, on a alors :

1. $0+P=P$, $P+Q=Q+P$, $(P+Q)+R=P+(Q+R)$
2. $P\times 1=P$, $P\times Q=Q\times P$, $P\times(Q\times R)=(P\times Q)\times R$
3. $P\times(Q+R)=P\times Q+P\times R$

Proposition.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$,

① Le produit de m fonctions polynômiales est une fonction polynômiale.

② Si $P \in \mathbb{R}[x]$ et $m \in \mathbb{N}^*$ alors $P^m \in \mathbb{R}[x]$

Complément : Coefficients du produit de deux polynômes.

Soient $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \longmapsto \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$:

$$P(X)\times Q(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)}_{\text{coefficients de } P\times Q} X^k$$

1.5 Dérivée

Proposition.

La dérivée d'une fonction polynomiale est une fonction polynomiale.

Remarque :

Si $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alors $P' : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ ou encore : $P' : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$

1.6 Degré.

Définition :

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$,

si $P=0$ alors $\deg(P)=-\infty$

si $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$ alors $\deg(P)=n$

Théorème :

Soient P et Q deux fonctions polynomiales.

❶ $\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg(P);\deg(Q)\}$

❷ $\deg(P\times Q)=\deg(P)+\deg(Q)$

❸ Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P^m)=m\deg(P)$

❹ Si $\deg(P)\geqslant 1$ alors $\deg(P')=\deg(P)-1$

1.7 Intégrité

Théorème : *Intégrité.*

Soient P et Q deux fonctions polynômiales,

$$P\times Q=0 \iff P=0 \text{ ou } Q=0$$

2

Racine d'une fonction polynômiale.

2.1 Définition.

Définition (*Racine de P*) :

> Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
> Dire que α est une racine de P signifie que : $P(\alpha) = 0$

2.2 Racines et factorisation.

Lemme :

> Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
> $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists\, Q_k \in \mathbb{R}[x] : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^k - \alpha^k = (x - \alpha)\, Q_k(x)$$

Théorème :

> Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
> $P(\alpha) = 0$ si, et seulement si, il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P : x \longmapsto (x - \alpha)Q(x)$

Théorème :

> Soient P une fonction polynômiale et k un entier naturel non nul,
> Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont k **racines distinctes** de P alors
> $$\exists Q \in \mathbb{R}[x] : \ P : x \longmapsto (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k)Q(x)$$

Corollaire :

> Soient P une fonction polynômiale et n un entier naturel non nul,
> Si P est de degré n et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont n **racines distinctes** de P alors
> $$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \ P : x \longmapsto \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

2.3 Nombres de racines d'un polynôme.

Soient P et Q deux fonctions polynomiales et n un entier naturel.

(1) Si α_1, $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont n racines **distinctes** de P et si $\deg(P) = n$,
alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$,

(2) Si P est de degré n (*Ce qui impose* $P \neq 0$), alors P a au plus n racines **distinctes**.

(3) Si P est de degré inférieur ou égal à n et si P a $(n + 1)$ racines **distinctes**, alors $P = 0$.

(4) La seule fonction polynômiale ayant une infinité de racines est la fonction nulle.

2.4 Ordre de mutiplicité.

Définition :

Soient $a \in \mathbb{R}$, P une fonction polynomiale non nulle et m un entier naturel non nul. Dire que α est une racine de P d'ordre de multiplicité m signifie qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-\alpha)^m Q(x) \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$

2.5 Lien entre dérivée et racines multiples.

Théorème :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[x]$, α est une racine multiple de P, si et seulement si, $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.

2.6 Fonction polynomiale de degré impair

Théorème :

Soit P une fonction polynomiale réelle, Si le degré de P est un entier impair alors P a au moins une racine réelle.