Feuille_Act_5 : Fonctions indicatrices.

Définition :

Soient E un ensemble et A une partie de E,
On appelle **fonction indicatrice** de A, *(notée : $\mathbb{1}_A$)* l'application de : $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

Remarque : $\mathbb{1}_A$ peut prendre juste deux valeurs 0 et 1 donc $\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A$.

Une autre notation.

Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant d'un élément x de E.
en notant $A = \{x \in E \mid P(x)\}$ pour tout x de E, on note : $\mathbb{1}_{P(x)} = \mathbb{1}_A(x)$

Remarque : Si $P(x)$ vraie alors $\mathbb{1}_{P(x)} = 1$ sinon $\mathbb{1}_{P(x)} = 0$.

Ex 1 : Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions suivantes *(définies sur $\mathbb{R}$)*.

❶ $\mathbb{1}_{[0,1]}$ ❷ $\mathbb{1}_{[\![0,6]\!]}$ ❸ $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ ❹ $x \longmapsto e^{-x}\, \mathbb{1}_{x\in[0,+\infty[}$ ❺ $x \longmapsto x^2\, \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$

❻ $x \longmapsto (1-e^{-2x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ ❼ $x \longmapsto 1-e^{-2x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ ❽ $x \longmapsto \dfrac{x+1}{2}\, \mathbb{1}_{0\leqslant x\leqslant 1} + \mathbb{1}_{1<x}$

Ex 2 : Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{2n} k\, \mathbb{1}_{k \text{ pair}} \qquad S_2(k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{1\leqslant k-i\leqslant n} \qquad S_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{i<j}$$

$$S_4(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\, \mathbb{1}_{k\leqslant n} \qquad S_5(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\, \mathbb{1}_{k\geqslant n} \qquad S_6 = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{j\leqslant i} \frac{1}{2^{j+j}}$$

Ex 3 : Simplifier les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{1}_{k \text{ pair}} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, \mathbb{1}_{n \text{ pair}}$$

Indication : on pourra utiliser les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{1}_{kimpair}$ *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, \mathbb{1}_{nimpair}$

Ex 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{si } x<0, \quad f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{si } x \geqslant 0, \quad f(x) = e^{-x}$$

Exprimer $f(x)$ à l'aide d'une fonction indicatrice.

Ex 5 : 1) Décrire simplement $\mathbb{1}_\varnothing$ et $\mathbb{1}_E$.

2) Soient A et B deux parties de E,

a. montrer que $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

b. montrer que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

c. en déduire $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$

3) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

a. Déterminer $\mathbb{1}_{A\cup B\cup C}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$.

b. En supposant que E est un ensemble fini,
déduire de la question précédente l'expression de card$(A\cup B\cup C)$ en fonction du cardinal d'intersections des ensembles A, B et C.

Feuille_Act_5_bis : Somme sur un ensemble fini.

Définition, notation :

Soient E un ensemble fini, tel que $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ avec $\operatorname{card}(E) = n$
et f une application de E dans F avec F un ensemble muni d'une somme.

On note : $$\sum_{x\in E} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)$$

Propositions :

Soit E un ensemble fini,

❶ Si A_1, A_2 , ..., A_p forment un système complet de parties de E alors :

$$\sum_{x\in E} f(x) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{x\in A_k} f(x)\right)$$

❷ Si σ est une bijection de E dans E, $\displaystyle\sum_{x\in E} f(x) = \sum_{x\in E} f(\sigma(x))$

On ne change pas la somme si on modifie l'ordre dans lequel on fait la somme.

❸ $\displaystyle\operatorname{card}(E) = \sum_{x\in E} 1$

❹ Soit A une partie de E, $\displaystyle\operatorname{card}(A) = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$

❺ Soient A et B deux parties de E, $\displaystyle\operatorname{card}(A\cap B) = \sum_{x\in A} \mathbb{1}_B(x)$

Ex 6 : 1) Quelle est la définition d'un système complet de parties de E ?

(on dira aussi en BCPST : une partition de E)

2) Quelle est la définition d'une bijection de E dans E ?
3) Donner un exemple de partition de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
4) Donner un exemple de partition de l'ensemble des élèves de la classe.
5) On note $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donner un exemple de bijection de E dans E.
6) On note E l'ensemble constitué des élèves et des professeurs de la BCPST2A *(sauf le professeur de maths)*.
A quel moment de l'année vous allez réaliser une bijection de E dans E ?
Quelle propriété devra vérifier cette bijection ?
(Voir le sujet ENS 2023)

– –

Ex 7 : Soient n un entier naturel non nul, et E un ensemble fini de cardinal n.

1) Montrer que : pour tout $x \in E$,
$$\sum_{A\in\mathscr{P}(E)} \mathbb{1}_A(x) = 2^{n-1}$$

Indication : On pourra la bijection $A \longmapsto \overline{A}$

2) En déduire que :
$$\sum_{A\in\mathscr{P}(E)} \operatorname{card}(A) = n2^{n-1} \qquad \sum_{(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2} \operatorname{card}(A\cap B) = n2^{2n-2}$$

Indication : On pourra utiliser des systèmes complets bien choisies de E

Ex 8 : Calculer les sommes suivantes : *(On discutera en fonction de la valeur de l'entier relatif k)*

1) $\displaystyle S_1(k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{k\leqslant i\leqslant k+n}$

2) $\displaystyle S_2(k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{k-n\leqslant i\leqslant k}$

3) $\displaystyle S_3(k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{k-n\leqslant i\leqslant k+n}$

4) $\displaystyle S_4(k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{1\leqslant k-i\leqslant n}$